Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 29, Nº 1, 83 - 92, 2006

Some results on generalized Appell functions

Jaime Castillo P.[1] *y Leda Galué*[2]

[1]*Facultad de Ingeniería, Universidad de La Guajira, Colombia. E-mail: Jacas68@yahoo.es*
[2]*Centro de Investigación de Matemática Aplicada (CIMA), Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia. Maracaibo, Venezuela. E-mail: lgalue@hotmail.com*

Abstract

Recently A. H. Al-Shammery and S. L. Kalla presented generalizations for the Appell's functions $F_i(w,z)$ $(i=1,2,3)$, introducing parameters τ,τ'. In this paper the generalized Appell's functions $F_i^{\tau,\tau'}(w,z)$ $(i=1,2,3)$, are represented in terms of a generalization of the Gauss hypergeometric series ${}_2R_1^{\tau}(z)$, in order to establish some integral representations, recurrence relations and differentiation formulas for generalized Appell's functions. An application and various particular cases are also presented.

Key words: Generalized Gauss hypergeometric series, generalized Appell's functions, integral representations, recurrence relations, differentiation formulas.

Algunos resultados sobre las funciones de Appell generalizadas

Resumen

Recientemente A. H. Al-Shammery y S. L. Kalla presentaron generalizaciones para las funciones de Appell $F_i(w,z)$ $(i=1,2,3)$, introduciendo los parámetros τ,τ'. En este trabajo se representan las funciones de Appell generalizadas $F_i^{\tau,\tau'}(w,z)(i=1,2,3)$ en términos de la serie hipergeométrica generalizada de Gauss ${}_2R_1^{\tau}(z)$, a fin de establecer algunas representaciones integrales, relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación para las funciones de Appell generalizadas. Se presenta además una aplicación y algunos casos particulares.

Palabras clave: Serie hipergeométrica generalizada de Gauss, funciones de Appell generalizadas, representaciones integrales, relaciones de recurrencia, fórmulas de diferenciación.

1. Introducción

Un gran número de funciones especiales pueden ser representadas en términos de series hipergeométricas y series hipergeométricas confluentes. Las series hipergeométricas en una y varias variables, aparecen naturalmente en una variedad de problemas en matemática aplicada, estadística, investigación de operaciones, física teórica y ciencias de la Ingeniería [1-4].

Srivastava y Kashyap [4] presentaron varias aplicaciones de las series hipergeométricas en una y varias variables en la teoría de colas y procesos estocásticos relacionados.

Exton [5, 6] ha considerado varios problemas, entre ellos: Distribuciones estadísticas finitas e infinitas, desplazamiento angular de una placa, vibración de una placa elástica delgada, producción de calor en un cilindro, ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, etc., los cuales conducen a integrales asociadas con series hipergeométricas en una y más variables.

Kalla y colaboradores [7] han usado funciones hipergeométricas para estudiar una forma unificada de distribuciones de tipo Gauss.

En 1999 N. Virchenco [8] consideró una generalización de la serie hipergeométrica de Gauss de la siguiente forma:

$${}_2R_1^{\tau}(z) = {}_2R_1(a,b;c;\tau;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)} \frac{z^k}{k!}, \qquad (1)$$

donde a, b, c son números complejos, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots, |z| < 1$.

Si $\tau = 1$ en (1):

$${}_2R_1(a,b;c;1;z) = {}_2F_1(a,b;c;z), \quad c \neq 0, -1, -2, \ldots, |z| < 1. \qquad (2)$$

Esta función tiene la siguiente representación integral

$${}_2R_1(a,b;c;\tau;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt^{\tau})^{-a}\,dt, \qquad (3)$$
$\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$.

Virchenko [8, 9] estableció las siguientes propiedades para la función ${}_2R_1^{\tau}(z)$:

$$(b - a\tau)R = bR(b+1) - a\tau R(a+1). \qquad (4)$$

$$(c - a\tau - 1)R = (c-1)R(c-1) - a\tau R(a+1). \qquad (5)$$

$$(c - b - 1)R = (c-1)R(c-1) - bR(b+1). \qquad (6)$$

$$cR = (c-b)R(c+1) + bR(a, b+1; c+1; \tau; z). \qquad (7)$$

$$\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)R = \Gamma(b)\Gamma(c+\tau)R(a+1) - z\Gamma(c)\Gamma(b+\tau) \times R(a+1, b+\tau; c+\tau; \tau; z), \qquad (8)$$

donde para simplificar la escritura se considera la siguiente notación:

$${}_2R_1(a,b;c;\tau;z) = R, \quad {}_2R_1(a+1,b;c;\tau;z) = R(a+1)$$

y similarmente para los demás parámetros.

Posteriormente, L. Galué y colaboradores [10] establecieron nuevas relaciones de recurrencia para ${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)$, entre ellas:

$$\Gamma(c+\tau)\Gamma(b+1)R(b+1) = \Gamma(c+\tau)\Gamma(b+1)R + a\tau\Gamma(b+\tau)\Gamma(c)z \times R(a+1, b+\tau; c+\tau; \tau; z). \qquad (9)$$

$$\Gamma(c+2+\tau)\Gamma(b)R(c+1) = \Gamma(c+2+\tau)\Gamma(b)R(c+2) + a\tau\Gamma(b+\tau)\Gamma(c+1)z \times R(a+1, b+\tau; c+2+\tau; \tau; z). \qquad (10)$$

Virchenko [8, 9] estableció además las siguientes fórmulas de diferenciación para la función ${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)$

$$\frac{d}{dz}\left[{}_2R_1(a,b;c;\tau;z)\right] = a\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)} \times {}_2R_1(a+1, b+\tau; c+\tau; \tau; z). \qquad (11)$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^a {}_2R_1(a,b;c;\tau;z)\right] = az^{a-1}{}_2R_1(a+1,b;c;\tau;z). \qquad (12)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[{}_2R_1(a,b;c;\tau;z)\right] = \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+\tau n)} \times {}_2R_1(a+n, b+\tau n; c+\tau n; \tau; z). \qquad (13)$$

$$a\ {}_2R_1(a+1,b;c;\tau;z) = \left(z\frac{d}{dz} + a\right){}_2R_1(a,b;c;\tau;z). \qquad (14)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{a+n-1}{}_2R_1(a,b;c;\tau;z)\right] = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} z^{a-1} \times {}_2R_1(a+n,b;c;\tau;z). \qquad (15)$$

En el 2000 Al-Shammery y Kalla [11], presentaron una generalización para las funciones de Appell en la forma siguiente:

$$F_1^{\tau,\tau'}(a,b,b';c;w,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(b)_k(b')_l\Gamma(a+\tau k+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' l)} \frac{z^l w^k}{l!\,k!}, \qquad (16)$$
$\tau, \tau' > 0, \quad |w| < 1, \quad |z| < 1$.

$$F_2^{\tau,\tau'}(a,b,b';c,c';w,z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c')}{\Gamma(b)\Gamma(b')} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+l}\Gamma(b+\tau k)\Gamma(b'+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau k)\Gamma(c'+\tau' l)} \frac{z^l w^k}{l!\,k!}, \qquad (17)$$
$\tau, \tau' > 0, \quad |w| + |z| < 1$.

$$F_3^{\tau,\tau'}(a,a',b,b';c;w,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(b')} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(a)_k(a')_l\Gamma(b+\tau k)\Gamma(b'+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' l)} \frac{z^l w^k}{l!\,k!}, \qquad (18)$$
$\tau, \tau' > 0, \quad |w| < 1, \quad |z| < 1$.

En este trabajo se representan las funciones de Appell generalizadas $F_i^{\tau,\tau'}(w,z)$ $(i=1,2,3)$ en términos de la serie hipergeométrica generalizada de Gauss ${}_2R_1^{\tau}(z)$, a fin de establecer algunas representaciones integrales, relaciones de recurrencia y fórmulas de diferenciación para las funciones de Appell generalizadas. Se presenta además una aplicación y algunos casos particulares.

2. Representación de las series de Appell generalizadas en términos de la función ${}_2R_1^{\tau}(z)$

Separando las series en (16)-(18) y usando (1) se obtienen directamente las siguientes representaciones:

$$F_1^{\tau,\tau'}(a,b,b';c;w,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k\Gamma(a+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)}\,{}_2R_1(b',a+\tau k;c+\tau k;\tau';z)\frac{w^k}{k!}. \tag{19}$$

$\tau,\tau'\in\mathbb{R},\quad \tau,\tau'>0,\quad c+\tau k\neq 0,-1,-2,\dots,$

$|w|<1,\quad |z|<1.$

$$F_2^{\tau,\tau'}(a,b,b';c,c';w,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\Gamma(b+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)}\,{}_2R_1(a+k,b';c';\tau';z)\frac{w^k}{k!}, \tag{20}$$

$\tau,\tau'\in\mathbb{R},\quad \tau,\tau'>0,\quad c'\neq 0,-1,-2,\dots,\quad |w|+|z|<1.$

$$F_3^{\tau,\tau'}(a,a',b,b';c;w,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\Gamma(b+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)}\,{}_2R_1(a',b';c+\tau k;\tau';z)\frac{w^k}{k!} \tag{21}$$

$\tau,\tau'\in\mathbb{R},\quad \tau,\tau'>0,\quad c+\tau k\neq 0,-1,-2,\dots,$

$|w|<1,\quad |z|<1.$

3. Representación integral de las funciones de Appell generalizadas en términos de la función ${}_2R_1^{\tau}(z)$

En esta sección se obtiene la representación integral de tipo Mellin-Barnes de la generalización τ de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2R_1^{\tau}(z)$, la cual se usará para establecer representaciones integrales de las funciones de Appell generalizadas.

Es bien conocido que [12, p. 19, No. (2.6.11)]

$$H_{p,q+1}^{1,p}\left[-x\left|\begin{matrix}(1-a_1,\alpha_1),\dots,(1-a_p,\alpha_p)\\(0,1),(1-b_1,\beta_1),\dots,(1-b_q,\beta_q)\end{matrix}\right.\right]=$$

$${}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\dots,(a_p,\alpha_p);\\(b_1,\beta_1),\dots,(b_q,\beta_q);\end{matrix}\,x\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+\alpha_j n)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\beta_j n)}\frac{x^n}{n!}. \tag{22}$$

donde $H[x]$ es la función H de Fox definida por

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\dots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),\dots,(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right.\right]=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)}x^s\,ds. \tag{23}$$

Por otro lado,

$${}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a_1,1),(a_2,\tau);\\(b_1,\tau);\end{matrix}\,z\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_1+n)\Gamma(a_2+\tau n)}{\Gamma(b_1+\tau n)}\frac{z^n}{n!}$$
$$=\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(b_1)}\,{}_2R_1(a_1,a_2;b_1;\tau;z), \tag{24}$$

luego de (22)-(24):

$${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)\Gamma(b+\tau s)}{\Gamma(c+\tau s)}(-z)^s\,ds, \tag{25}$$

$\tau>0,\quad -\mathrm{Re}(a)<\gamma<0,\quad -\mathrm{Re}(b)<\tau\gamma,\quad |z|<1.$

De (19) y usando (25) se obtiene

$$F_1^{\tau,\tau'}(a,b,b';c;w,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b')2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k w^k}{k!}\times$$
$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(-s)\Gamma(b'+s)\Gamma(a+\tau k+\tau's)}{\Gamma(c+\tau k+\tau's)}(-z)^s\,ds$$
$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b')2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma(b'+s)\Gamma(-s)(-z)^s\times$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(b)_k\frac{\Gamma(a+\tau k+\tau's)}{\Gamma(c+\tau k+\tau's)}\frac{w^k}{k!}\,ds$$

donde hemos intercambiado el orden de la integral y la suma, con base en la convergencia absoluta. Luego de (1)

$$F_1^{\tau,\tau'}(a,b,b';c;w,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b')2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma(b'+s)\Gamma(-s)(-z)^s\frac{\Gamma(a+\tau's)}{\Gamma(c+\tau's)}\times {}_2R_1(b,a+\tau's;c+\tau's;\tau;w)ds$$

esto es,

$$F_1^{\tau,\tau'}(a,b,b';c;w,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b')2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}(-z)^s\Gamma\left[\begin{matrix}a+\tau's, b'+s,-s\\ c+\tau's\end{matrix}\right]\times {}_2R_1(b,a+\tau's;c+\tau's;\tau;w)ds \quad (26)$$

$\tau,\tau'>0,\quad -\mathrm{Re}(b')<\gamma<0,\quad -\mathrm{Re}(a)<\tau'\gamma,$
$|w|<1,\quad |z|<1.$

Similarmente,

$$F_2^{\tau,\tau'}(a,b,b';c,c';w,z) = \frac{\Gamma(c')}{\Gamma(a)\Gamma(b')2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}(-z)^s\Gamma\left[\begin{matrix}a+s, b'+\tau's,-s\\ c'+\tau's\end{matrix}\right]\times {}_2R_1(a+s,b;c;\tau;w)ds \quad (27)$$

$\tau,\tau'>0,\quad -\mathrm{Re}(a)<\gamma<0,\quad -\mathrm{Re}(b')<\tau'\gamma,$
$|w|+|z|<1.$

$$F_3^{\tau,\tau'}(a,a',b,b';c;w,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a')\Gamma(b')2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}(-z)^s\Gamma\left[\begin{matrix}a'+s, b'+\tau's,-s\\ c+\tau's\end{matrix}\right]\times {}_2R_1(a,b;c+\tau's;\tau;w)ds \quad (28)$$

$\tau,\tau'>0,\quad -\mathrm{Re}(a')<\gamma<0,\quad -\mathrm{Re}(b')<\tau'\gamma,$
$|w|<1,\quad |z|<1.$

4. Relaciones de recurrencia para las funciones de Appell generalizadas

A continuación se establecen algunas relaciones de recurrencia para las funciones de Appell generalizadas.

Para simplificar la escritura se usará la siguiente notación:

$$F_1^{\tau,\tau'}(b'+1)\underline{\underline{\Delta}}F_1^{\tau,\tau'}(a,b,b'+1;c;w,z)$$

con un significado análogo para los otros parámetros, y las otras funciones de Appell generalizadas.

4.1. Relaciones de recurrencia para $F_1^{\tau,\tau'}(a,b,b';c;w,z)$

Si $R={}_2R_1(b',a+\tau k;c+\tau k;\tau';z)$ en (6) se tiene

$$R=\frac{(c+\tau k-1)R(b',a+\tau k;c+\tau k-1;\tau';z)}{c-a-1}-\frac{(a+\tau k)R(b',a+\tau k+1;c+\tau k;\tau';z)}{c-a-1}$$

$\tau,\tau'>0,\quad c-a\neq 1.$

Sustituyendo R en (19) y separando las series,

$$F_1^{\tau,\tau'}=\frac{\Gamma(c)}{(c-a-1)\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k\Gamma(a+\tau k)}{\Gamma(c-1+\tau k)}\times R(b',a+\tau k;c+\tau k-1;\tau';z)\frac{w^k}{k!}-\frac{\Gamma(c)}{(c-a-1)\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k\Gamma(a+1+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)}\times R(b',a+1+\tau k;c+\tau k;\tau';z)\frac{w^k}{k!}.$$

Usando (19) se obtiene

$$(c-a-1)F_1^{\tau,\tau'}=(c-1)F_1^{\tau,\tau'}(c-1)-aF_1^{\tau,\tau'}(a+1) \quad (29)$$

$c-a\neq 1,\quad c+\tau k\neq 1,0,-1,-2,\ldots$

De (7) y (8) usando un procedimiento similar se obtuvieron las siguientes relaciones de recurrencia:

$$cF_1^{\tau,\tau'}=(c-a)F_1^{\tau,\tau'}(c+1)+aF_1^{\tau,\tau'}(a+1,b,b';c+1;w,z) \quad (30)$$

$c+\tau k\neq 0,-1,-2,\ldots$

$$\Gamma(a)\Gamma(c+\tau)F_1^{\tau,\tau'}=\Gamma(a)\Gamma(c+\tau)F_1^{\tau,\tau'}(b'+1)-z\Gamma(c)\Gamma(a+\tau)F_1^{\tau,\tau'}(a+\tau,b,b'+1;c+\tau;w,z). \quad (31)$$

$c+\tau k,\quad c+\tau k+\tau\neq 0,-1,-2,\ldots$

De acuerdo con (19)

$$F_1^{\tau,\tau'}(b'+1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b)_k \Gamma(a+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)} \times$$

$$ {}_2R_1(b'+1, a+\tau k; c+\tau k; \tau'; z) \frac{w^k}{k!} \qquad (32)$$

$\tau, \tau' > 0, \quad |w| < 1, \quad |z| < 1.$

De (4) se tiene

$$R(a+1) = \frac{bR(b+1) - (b - a\tau)R}{a\tau}.$$

De este resultado con $R = {}_2R_1(b', a+\tau k; c+\tau k; \tau'; z)$

$$R(b'+1) = \frac{(a+\tau k)R(a+\tau k+1)}{b'\tau'} - \frac{(a+\tau k - b'\tau')R(b', a+\tau k; c+\tau k; \tau'; z)}{b'\tau'}, \quad b' \neq 0.$$

Usando (1)

$$R(b'+1) = \frac{1}{b'\tau'}\left[(a+\tau k)\frac{\Gamma(c+\tau k)}{\Gamma(a+\tau k+1)} \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(b')_l \Gamma(a+\tau k+\tau' l+1)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' l)} \frac{z^l}{l!}\right] - \frac{1}{b'\tau'}\left[(a+\tau k - b'\tau')\frac{\Gamma(c+\tau k)}{\Gamma(a+\tau k)} \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(b')_l \Gamma(a+\tau k+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' l)} \frac{z^l}{l!}\right]$$

$\tau, \tau' \in \mathbb{R}, \quad \tau, \tau' > 0, \quad b' \neq 0, \quad c+\tau k \neq 0, -1, -2, \ldots,$

$|z| < 1.$

Desarrollando,

$$R(b'+1) = \frac{1}{b'\tau'}\frac{\Gamma(c+\tau k)}{\Gamma(a+\tau k)}(a+\tau k) \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(b')_l \Gamma(a+\tau k+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' l)} \frac{z^l}{l!} + \frac{1}{b'}\frac{\Gamma(c+\tau k)}{\Gamma(a+\tau k)} \times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(b')_l \Gamma(a+\tau k+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' l)} \frac{z^l}{(l-1)!} - \frac{1}{b'\tau'}\frac{\Gamma(c+\tau k)}{\Gamma(a+\tau k)}(a+\tau k) \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(b')_l \Gamma(a+\tau k+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' l)} \frac{z^l}{l!} + \frac{\Gamma(c+\tau k)}{\Gamma(a+\tau k)} \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(b')_l \Gamma(a+\tau k+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' l)} \frac{z^l}{l!},$$

simplificando,

$$R(b'+1) = \frac{1}{b'}\frac{\Gamma(c+\tau k)}{\Gamma(a+\tau k)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(b')_l \Gamma(a+\tau k+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' l)} \times \frac{z^l}{(l-1)!} + \frac{\Gamma(c+\tau k)}{\Gamma(a+\tau k)} \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(b')_l \Gamma(a+\tau k+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' l)} \frac{z^l}{l!}.$$

Haciendo un cambio de índice en la primera suma y usando el conocido resultado

$$(\lambda)_{m+n} = (\lambda)_m (\lambda+m)_n$$

se obtiene

$$R(b'+1) = \frac{\Gamma(c+\tau k)}{\Gamma(a+\tau k)} z \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(b'+1)_l \Gamma(a+\tau'+\tau k+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau'+\tau k+\tau' l)} \times \frac{z^l}{l!} + \frac{\Gamma(c+\tau k)}{\Gamma(a+\tau k)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(b')_l \Gamma(a+\tau k+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' l)} \frac{z^l}{l!}. \qquad (33)$$

Sustituyendo (33) en (32)

$$F_1^{\tau,\tau'}(b'+1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(b)_k (b'+1)_l \Gamma(a+\tau'+\tau k+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau'+\tau k+\tau' l)} \frac{z^l w^k}{l!k!} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(b)_k (b')_l \Gamma(a+\tau k+\tau' l)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' l)} \frac{z^l w^k}{l!k!}$$

y usando (16) se tiene

$$\Gamma(a)\Gamma(c+\tau')F_1^{\tau,\tau'}(b'+1) = \Gamma(c)\Gamma(a+\tau')zF_1^{\tau,\tau'}(a+\tau', b, b'+1; c+\tau'; w, z) + \Gamma(a)\Gamma(c+\tau')F_1^{\tau,\tau'} \qquad (34)$$

$b' \neq 0, \quad c+\tau k, \quad c+\tau k+\tau' \neq 0, -1, -2, \ldots$

Análogamente de (5) y (10) se deducen las siguientes relaciones de recurrencia:

$$b'\tau'\Gamma(a)\Gamma(c+\tau)F_1^{\tau,\tau'}(b'+1) =$$
$$(c-1)\Gamma(a)\Gamma(c+\tau)F_1^{\tau,\tau'}(c-1) - (c-b'\tau'-1)\Gamma(a)\times$$
$$\Gamma(c+\tau)F_1^{\tau,\tau'} - b\tau w\Gamma(c)\Gamma(a+\tau)F_1^{\tau,\tau'}(a+\tau, b+1, b';$$
$$c+\tau; w, z) \qquad (35)$$
$$b'\neq 0,\quad c+\tau k,\quad c+\tau k+\tau'\neq 0,-1,-2,\ldots$$

$$\Gamma(a)\Gamma(c+2+\tau)\Gamma(c+2+\tau')F_1^{\tau,\tau'}(c+1) =$$
$$\Gamma(a)\Gamma(c+2+\tau)\Gamma(c+2+\tau')F_1^{\tau,\tau'}(c+2)+$$
$$\tau b w\Gamma(c+1)\Gamma(c+2+\tau')\Gamma(a+\tau)F_1^{\tau,\tau'}(a+\tau, b+1, b';$$
$$c+2+\tau; w,z) + \tau' b' z\Gamma(c+1)\Gamma(a+\tau')\times$$
$$\Gamma(c+2+\tau)F_1^{\tau,\tau'}(a+\tau', b, b'+1; c+2+\tau'; w,z) \quad (36)$$
$$c+\tau k+\tau, c+\tau k+\tau'\neq -2,-3,-4,\ldots$$
$$c+\tau k\neq -1,-2,\ldots,$$

En los resultados (29)-(31), (34)-(36) $\tau,\tau'\in\mathbb{R}$, $\tau,\tau'>0$, $|w|<1$, $|z|<1$.

4.2. Relaciones de recurrencia para $F_2^{\tau,\tau'}(a,b,b';c,c';w,z)$

De (20) aplicando las fórmulas (4)-(10) obtenemos:

$$(b'-a\tau')\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)F_2^{\tau,\tau'} =$$
$$b'\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)F_2^{\tau,\tau'}(b'+1) + w\tau' a\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)\times$$
$$F_2^{\tau,\tau'}(a+1, b+\tau, b'; c+\tau, c'; w,z) -$$
$$a\tau'\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)F_2^{\tau,\tau'}(a+1) \qquad (37)$$
$$b'\neq 0,\quad c'\neq 0,-1,-2,\ldots$$

$$\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)(c'-1)F_2^{\tau,\tau'}(c'-1) =$$
$$(c'-a\tau'-1)\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)F_2^{\tau,\tau'} - a\tau' w\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)\times$$
$$F_2^{\tau,\tau'}(a+1, b+\tau, b'; c+\tau, c'; w,z)+$$
$$a\tau'\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)F_2^{\tau,\tau'}(a+1) \qquad (38)$$
$$c'\neq 1,0,-1,-2,\ldots$$

$$(c'-b'-1)F_2^{\tau,\tau'} = (c'-1)F_2^{\tau,\tau'}(c'-1) - b'F_2^{\tau,\tau'}(b'+1) \qquad (39)$$
$$c'-b'\neq 1,\quad c'\neq 1,0,-1,-2,\ldots$$

$$c'F_2^{\tau,\tau'} = (c'-b')F_2^{\tau,\tau'}(c'+1)+$$
$$b'F_2^{\tau,\tau'}(a, b, b'+1; c, c'+1; w,z) \qquad (40)$$
$$c'\neq 0,-1,-2,\ldots$$

$$\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)\Gamma(b')\Gamma(c'+\tau')F_2^{\tau,\tau'}(a+1) =$$
$$\Gamma(b)\Gamma(b')\Gamma(c+\tau)\Gamma(c'+\tau')F_2^{\tau,\tau'} + w\Gamma(b')\Gamma(c'+\tau')\times$$
$$\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)F_2^{\tau,\tau'}(a+1, b+\tau, b'; c+\tau, c'; w,z)+$$
$$\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)\Gamma(c')\Gamma(b'+\tau')z\times$$
$$F_2^{\tau,\tau'}(a+1, b, b'+\tau'; c, c'+\tau'; w,z) \qquad (41)$$
$$c',\quad c'+\tau'\neq 0,-1,-2,\ldots$$

$$\Gamma(b'+1)\Gamma(c'+\tau')F_2^{\tau,\tau'}(b'+1) =$$
$$\Gamma(b'+1)\Gamma(c'+\tau')F_2^{\tau,\tau'} + a\tau' z\Gamma(c')\Gamma(b'+\tau')\times$$
$$F_2^{\tau,\tau'}(a+1, b, b'+\tau'; c, c'+\tau'; w,z) \qquad (42)$$
$$c',\quad c'+\tau'\neq 0,-1,-2,\ldots$$

$$\Gamma(b')\Gamma(c'+2+\tau')\left[F_2^{\tau,\tau'}(c'+1) - F_2^{\tau,\tau'}(c'+2)\right] =$$
$$a\tau' z\Gamma(c'+1)\Gamma(b'+\tau')F_2^{\tau,\tau'}(a+1, b, b'+\tau';$$
$$c, c'+2+\tau'; w,z) \qquad (43)$$
$$c'\neq -1,-2,\ldots,\quad c'+\tau'\neq -2,-3,-4,\ldots$$

En los resultados (37)-(43) $\tau,\tau'\in\mathbb{R}$, $\tau,\tau'>0$, $|w|+|z|<1$.

4.3. Relaciones de recurrencia para $F_3^{\tau,\tau'}(a,a',b,b';c;w,z)$

Usando (21) y los resultados (4)-(8) y (10) se obtienen respectivamente:

$$(b'-a'\tau')F_3^{\tau,\tau'} = b'F_3^{\tau,\tau'}(b'+1) - a'\tau'F_3^{\tau,\tau'}(a'+1) \quad (44)$$
$$b'\neq a'\tau',\quad c+\tau k\neq 0,-1,-2,\ldots$$

$$(c-1)\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)F_3^{\tau,\tau'}(c-1) =$$
$$(c-1)\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)F_3^{\tau,\tau'} + \tau w a\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)\times$$
$$F_3^{\tau,\tau'}(a+1, a', b+\tau, b'; c+\tau; w,z) - \Gamma(b)\times$$
$$\Gamma(c+\tau)a'\tau'F_3^{\tau,\tau'} + \Gamma(b)\Gamma(c+\tau)a'\tau'F_3^{\tau,\tau'}(a'+1) \qquad (45)$$
$$c+\tau k\neq 1,0,-1,-2,\ldots,\quad c+\tau k+\tau\neq 0,-1,-2,\ldots$$

$$(c-1)\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)F_3^{\tau,\tau'}(c-1) =$$
$$\left[(c-1)\Gamma(b)\Gamma(c+\tau) - b'\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)\right]F_3^{\tau,\tau'} +$$
$$\tau w a\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)F_3^{\tau,\tau'}(a+1, a', b+\tau, b'; c+\tau; w,z)+$$
$$b'\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)F_3^{\tau,\tau'}(b'+1) \qquad (46)$$
$$c+\tau k\neq 1,0,-1,-2,\ldots,\quad c+\tau k+\tau\neq 0,-1,-2,\ldots$$

$$c\Gamma(b)\Gamma(c+1+\tau)F_3^{\tau,\tau'} =$$
$$c\Gamma(b)\Gamma(c+1+\tau)F_3^{\tau,\tau'}(c+1) + \tau w a \Gamma(c+1)\Gamma(b+\tau)\times$$
$$F_3^{\tau,\tau'}(a+1, a', b+\tau, b'; c+1+\tau; w, z) -$$
$$b\Gamma(b)\Gamma(c+1+\tau)F_3^{\tau,\tau'}(c+1) +$$
$$b\Gamma(b)\Gamma(c+1+\tau)F_3^{\tau,\tau'}(a, a', b, b'+1; c+1; w, z) \quad (47)$$
$$c+\tau k \neq 0, -1, -2, \ldots, \quad c+\tau k+\tau \neq -1, -2, \ldots$$

$$\Gamma(b')\Gamma(c+\tau')F_3^{\tau,\tau'} =$$
$$\Gamma(b')\Gamma(c+\tau')F_3^{\tau,\tau'}(a'+1) - z\Gamma(c)\Gamma(b'+\tau')\times$$
$$F_3^{\tau,\tau'}(a, a'+1, b, b'+\tau'; c+\tau'; w, z) \quad (48)$$
$$c+\tau k, \quad c+\tau k+\tau' \neq 0, -1, -2, \ldots$$

$$\Gamma(b)\Gamma(b')\Gamma(c+2+\tau)\Gamma(c+2+\tau')F_3^{\tau,\tau'}(c+1) =$$
$$\Gamma(b)\Gamma(b')\Gamma(c+2+\tau)\Gamma(c+2+\tau')F_3^{\tau,\tau'}(c+2) +$$
$$\tau w a \Gamma(b')\Gamma(c+2+\tau')\Gamma(c+1)\Gamma(b+\tau)\times$$
$$F_3^{\tau,\tau'}(a+1, a', b+\tau, b'; c+2+\tau; w, z) +$$
$$\Gamma(b)\Gamma(c+2+\tau)\Gamma(b'+\tau')\Gamma(c+1)a\tau' z\times$$
$$F_3^{\tau,\tau'}(a, a'+1, b, b'+\tau'; c+2+\tau'; w, z). \quad (49)$$
$$c+\tau k+\tau, c+\tau k+\tau' \neq -2, -3, -4, \ldots$$
$$c+\tau k \neq -1, -2, \ldots,$$

En los resultados (44)-(49) $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$, $\tau, \tau' > 0$, $|w| < 1$, $|z| < 1$.

Otras relaciones de recurrencia para $F_i^{\tau,\tau'} (i = 1,2,3)$ están disponibles en [13].

5. Fórmulas de diferenciación para las funciones de Appell generalizadas

a) De acuerdo con (19):

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{b'+n-1}F_1^{\tau,\tau'}(a, b, b'; c; w, z)\right] =$$
$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k\Gamma(a+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)}\frac{w^k}{k!}\times$$
$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{b'+n-1}\,{}_2R_1(b', a+\tau k; c+\tau k; \tau'; z)\right]$$

aplicando (15) se tiene

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{b'+n-1}F_1^{\tau,\tau'}(a, b, b'; c; w, z)\right] =$$
$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k\Gamma(a+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)}\frac{\Gamma(b'+n)}{\Gamma(b')}z^{b'-1}\times$$
$${}_2R_1(b'+n, a+\tau k; c+\tau k; \tau'; z)\frac{w^k}{k!}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{b'+n-1}F_1^{\tau,\tau'}(a, b, b'; c; w, z)\right] =$$
$$\frac{\Gamma(b'+n)}{\Gamma(b')}z^{b'-1}F_1^{\tau,\tau'}(a, b, b'+n; c; w, z) \quad (50)$$
$$\tau, \tau' > 0, \quad c+\tau k \neq 0, -1, -2, -3, \ldots, \quad |w| < 1, \ |z| < 1$$

donde hemos usado nuevamente (19).

b) $$\frac{d^n}{dz^n}\left[F_1^{\tau,\tau'}(a, b, b'; c; w, z)\right] =$$
$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k\Gamma(a+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)}\frac{w^k}{k!}\times$$
$$\frac{d^n}{dz^n}\left[{}_2R_1(b', a+\tau k; c+\tau k; \tau'; z)\right],$$

en virtud de (13)

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[F_1^{\tau,\tau'}(a, b, b'; c; w, z)\right] =$$
$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k\Gamma(b'+n)}{\Gamma(b')}\frac{\Gamma(a+\tau k+\tau' n)}{\Gamma(c+\tau k+\tau' n)}\times$$
$${}_2R_1(b'+n, a+\tau k+\tau' n; c+\tau k+\tau' n; \tau'; z)\frac{w^k}{k!},$$

y de (19)

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[F_1^{\tau,\tau'}(a, b, b'; c; w, z)\right] =$$
$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(b'+n)}{\Gamma(b')}\frac{\Gamma(a+\tau' n)}{\Gamma(c+\tau' n)}\times$$
$$F_1^{\tau,\tau'}(a+\tau' n, b, b'+n; c+\tau' n; w, z) \quad (51)$$
$$\tau, \tau' > 0, \quad c+\tau k+\tau' n \neq 0, -1, -2, -3, \ldots, \quad |w| < 1,$$
$$|z| < 1.$$

c) $$\left(z\frac{d}{dz}+b'\right)F_1^{\tau,\tau'}(a, b, b'; c; w, z) =$$
$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k\Gamma(a+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)}\frac{w^k}{k!}\times$$
$$\left(z\frac{d}{dz}+b'\right){}_2R_1(b', a+\tau k; c+\tau k; \tau'; z)$$

entonces de (14)

$$\left(z\frac{d}{dz}+b'\right)F_1^{\tau,\tau'}(a,b,b';c;w,z)=$$

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b)_k\Gamma(a+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)}\times$$

$$b'\,{}_2R_1(b'+1,a+\tau k;c+\tau k;\tau';z)\frac{w^k}{k!},$$

y de (19)

$$\left(z\frac{d}{dz}+b'\right)F_1^{\tau,\tau'}(a,b,b';c;w,z)=$$

$$b'F_1^{\tau,\tau'}(a,b,b'+1;c;w,z) \qquad (52)$$

$\tau,\tau'>0,\quad c+\tau k\neq 0,-1,-2,-3,\ldots;\quad |w|<1,\ |z|<1.$

Aplicando un procedimiento análogo se establecen los siguientes resultados:

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[F_2^{\tau,\tau'}(a,b,b';c,c';w,z)\right]=$$

$$\frac{\Gamma(c')}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(b'+\tau'n)}{\Gamma(b')}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c'+\tau'n)}\times$$

$$F_2^{\tau,\tau'}(a+n,b,b'+\tau'n;c'+\tau'n;w,z) \qquad (53)$$

$\tau,\tau'>0,\quad c'+\tau'n\neq 0,-1,-2,-3,\ldots;\quad |w|+|z|<1.$

$$\left(z\frac{d}{dz}+a\right)F_2^{\tau,\tau'}(a,b,b';c,c';w,z)=$$

$$aF_2^{\tau,\tau'}(a+1,b,b';c,c';w,z)-$$

$$wa\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\tau)}F_2^{\tau,\tau'}(a+1,b+\tau,b';c+\tau,c';w,z) \qquad (54)$$

$\tau,\tau'>0,\quad c'\neq 0,-1,-2,-3,\ldots;\quad |w|+|z|<1.$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[F_3^{\tau,\tau'}(a,a',b,b';c;w,z)\right]=$$

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a')}\frac{\Gamma(b'+\tau'n)}{\Gamma(b')}\frac{\Gamma(a'+n)}{\Gamma(c+\tau'n)}\times$$

$$F_3^{\tau,\tau'}(a,a'+n,b,b'+\tau'n;c+\tau'n;w,z) \qquad (55)$$

$\tau,\tau'>0,\quad c+\tau k+\tau'n\neq 0,-1,-2,-3,\ldots;\quad |w|<1,$ $|z|<1.$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{a'+n-1}F_3^{\tau,\tau'}(a,a',b,b';c;w,z)\right]=$$

$$\frac{\Gamma(a'+n)}{\Gamma(a')}z^{a'-1}F_3^{\tau,\tau'}(a,a'+n,b,b';c;w,z) \qquad (56)$$

$\tau,\tau'>0,\quad c+\tau k\neq 0,-1,-2,-3,\ldots;\quad |w|<1,\ |z|<1.$

$$\left(z\frac{d}{dz}+a'\right)F_3^{\tau,\tau'}(a,a',b,b';c;w,z)=$$

$$aF_3^{\tau,\tau'}(a,a'+1,b,b';c;w,z) \qquad (57)$$

$\tau,\tau'>0,\quad c+\tau k\neq 0,-1,-2,-3,\ldots;\quad |w|<1,\ |z|<1.$

6. Aplicación

A continuación se usarán algunas de las relaciones de recurrencia obtenidas en la sección 4, a fin de desarrollar varias series finitas que involucran a las funciones de Appell generalizadas.

1) De (29) se tiene:

$$cF_1^{\tau,\tau'}-(c-1)F_1^{\tau,\tau'}(c-1)=(a+1)F_1^{\tau,\tau'}-aF_1^{\tau,\tau'}(a+1)$$

luego,

$$\frac{cF_1^{\tau,\tau'}-(c-1)F_1^{\tau,\tau'}(c-1)}{a(a+1)}=\frac{F_1^{\tau,\tau'}}{a}-\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a+1)}{a+1}, \qquad (58)$$

$a\neq 0,\ 1.$

Introduciendo el parámetro j en (58) se obtiene:

$$\frac{cF_1^{\tau,\tau'}(a+j-1,b,b';c;w,z)}{(a+j-1)(a+j)}-$$

$$\frac{(c-1)F_1^{\tau,\tau'}(a+j-1,b,b';c-1;w,z)}{(a+j-1)(a+j)}=$$

$$\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a+j-1,b,b';c;w,z)}{a+j-1}-\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a+j,b,b';c;w,z)}{a+j} \qquad (59)$$

$a\neq -j,-j+1.$

Sumando sobre j en ambos lados de (59) se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{cF_1^{\tau,\tau'}(a+j-1,b,b';c;w,z)}{(a+j-1)(a+j)}-\frac{(c-1)F_1^{\tau,\tau'}(a+j-1,b,b';c-1;w,z)}{(a+j-1)(a+j)}\right]=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a+j-1,b,b';c;w,z)}{a+j-1}-\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a+j,b,b';c;w,z)}{a+j}\right].$$

Desarrollando la serie de la derecha se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{cF_1^{\tau,\tau'}(a+j-1,b,b';c;w,z)}{(a+j-1)(a+j)}-\frac{(c-1)F_1^{\tau,\tau'}(a+j-1,b,b';c-1;w,z)}{(a+j-1)(a+j)}\right]=$$

$$\frac{F_1^{\tau,\tau'}}{a}-\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a+1)}{a+1}+\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a+1)}{a+1}-\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a+2)}{a+2}+\ldots+\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a+n-1)}{a+n-1}-\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a+n)}{a+n}$$

simplificando,

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{cF_1^{\tau,\tau'}(a+j-1,b,b';c;w,z)}{(a+j-1)(a+j)}-\frac{(c-1)F_1^{\tau,\tau'}(a+j-1,b,b';c-1;w,z)}{(a+j-1)(a+j)}\right]=$$

$$\frac{1}{a}F_1^{\tau,\tau'}(a)-\frac{1}{(a+n)}F_1^{\tau,\tau'}(a+n) \qquad (60)$$

$c-a\neq 1,\quad c+\tau k\neq 1,0,-1,-2,\ldots;$
$a\neq 0,-1,-2,\ldots,-n;\quad |w|<1,\quad |z|<1.$

Usando un procedimiento análogo se obtuvieron, entre otros, los siguientes resultados:

2) En virtud de (34)

$$\Gamma(c)\Gamma(a+\tau')z\sum_{j=1}^{n}F_1^{\tau,\tau'}(a+\tau',b,b'+j;c+\tau';w,z)=$$

$$\Gamma(a)\Gamma(c+\tau')\left[F_1^{\tau,\tau'}(b'+n)-F_1^{\tau,\tau'}\right] \qquad (61)$$

$b\neq 0,\quad c+\tau k,\quad c+\tau k+\tau'\neq 0,-1,-2,\ldots,\quad |w|<1,$
$|z|<1.$

3) De (30)

$$c\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a+j-1,b,b';c;w,z)}{(a+j-1)}-\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a+j-1,b,b';c+1;w,z)}{(a+j-1)}\right]=$$

$$F_1^{\tau,\tau'}(a+n,b,b';c+1;w,z)-F_1^{\tau,\tau'}(a,b,b';c+1;w,z) \qquad (62)$$

$c+\tau k\neq 0,-1,-2,\ldots,\quad a\neq 0,-1,-2,\ldots,-n+1;$
$|w|<1,\quad |z|<1.$

4) De (30)

$$a\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a+1,b,b';c+j;w,z)}{(c+j-1)}-,\frac{F_1^{\tau,\tau'}(a,b,b';c+j;w,z)}{(c+j-1)}\right]=$$

$$F_1^{\tau,\tau'}-F_1^{\tau,\tau'}(a,b,b';c+n;w,z) \qquad (63)$$

$c+\tau k\neq 0,-1,-2,\ldots,\quad c\neq 0,-1,-2,\ldots,-n+1;$
$|w|<1,\quad |z|<1.$

5) De acuerdo con (31)

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(c+\tau)}z\sum_{j=1}^{n}F_1^{\tau,\tau'}(a+\tau,b,b'+j;c+\tau;w,z)=$$

$$F_1^{\tau,\tau'}(b'+n)-F_1^{\tau,\tau'} \qquad (64)$$

$c+\tau k,\quad c+\tau k+\tau\neq 0,-1,-2,\ldots,\quad |w|<1,\quad |z|<1.$

De los resultados (37)-(40), (42), (44)-(46) y (48) pueden establecerse series finitas que involucran a las funciones $F_2^{\tau,\tau'}$ y $F_3^{\tau,\tau'}$ [13].

7. Casos particulares

Para $\tau=\tau'=1$ se obtienen resultados para las funciones $F_i(w,z),\quad i=1,2,3$ como se indica en la Tabla 1.

Tabla 1
Tipos de Fórmulas de Reducción

Nº de la ecuación	Tipo de caso particular	Referencia
(26)-(28)	Representaciones integrales	[14, p.332. Nos.(7)-(9)]
(29-(31), (34)-(49)	Relaciones de recurrencia	
(50)-(57)	Fórmulas de diferenciación	
(60)-(64)	Series finitas	

Agradecimiento

L. Galué agradece al CONDES por el soporte financiero.

Referencias Bibliográficas

1. L. C. Andrews: Special Functions of Mathematics for Engineers. SPIE; Oxford Science Publications, 1998.
2. N. N. Lebedev: Special Functions and Their Applications. Prentice-Hall, Inc., New York, 1965.
3. J. B. Seaborn: Hypergeometric Functions and Their Applications. Springer-Verlag, New York, 1991.
4. H. M. Srivastava and B. Kashyap: Special Functions in Queuing Theory and Related Stochastic Process. Academic Press, New York, 1982.
5. H. Exton: Handbook of Hypergeometric Integrals. John Wiley & Sons, New York, 1978.
6. H. Exton: Multiple Hypergeometric Functions and Applications. Ellis Horwood, Chichester, 1976.
7. S. L. Kalla, B. N. Al-Saqabi and H. G. Khajah: A unified form of gamma-type distributions. Applied Mathematics and Computations, 118 (2000), 175-187.
8. N. Virchenko: On some generalizations of the functions of hypergeometric type. Fractional Calculus and Applied Analysis. 2, 3 (1999), 233-244.
9. N. Virchenko, S. L. Kalla and A. Al-Zamel: Some results on a generalized hypergeometric function. Integral Transforms and Special Function 12, 1 (2001), 89-100.
10. L. Galué, A. Al-Zamel and S. L. Kalla: Further results on generalized hypergeometric functions. Applied Mathematics and Computation, 136 (2003), 17-25.
11. A. H. Al-Shammery and S. L. Kalla: An extension of some hypergeometric function of two variables. Rev. Acad. Canar. Cienc., XII (Núms. 1-2) (2000), 189-196.
12. H. M. Srivastava, K. C. Gupta and S. P. Goyal: The H-functions of One and Two Variables. South Asian Publishers, New Delhi, 1982.
13. J. A. Castillo: Algunos resultados sobre las funciones de Appell generalizadas. La Universidad del Zulia, Tesis de Magister. Maracaibo, 2004.
14. A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov and O. I. Marichev: Integrals and Series. Gordon and Breach Science Publishers, Vol. 3, New York, 1992.

Recibido el 11 de Abril de 2005
En forma revisada el 23 de Enero de 2006