Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia
Vol. 14, No. 2, 1991

JUDITH AULAR DE DURAN
Departamento de Matemáticas
Facultad de Humanidades y Educación
Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela

SHYAM L. KALLA
División de Postgrado
Facultad de Ingeniería
Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela

RELACIONES FUNCIONALES CON FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS Y DIGAMMA

RESUMEN

En el presente trabajo se realizan relaciones funcionales con funciones hipergeométricas y digamma. Se utiliza el método de Kalla y Al-Saqabi para encontrar la suma de algunas series infinitas y, usando el teorema de Karlsson, se generalizan otras series ya estudiadas cuyos resultados vienen expresados en términos de la función digamma. Se evalúan además integrales que involucran funciones hipergeométricas confluentes y funciones generalizadas de Jacobi de tal manera que los resultados conocidos surgen como casos particulares.

ABSTRACT

In this work functional relations with hypergeometric and digamma functions are stablished. The method of Kalla y Al-Saqabi is used in order to find the sum of some infinite series and, using the Karlsson's theorem, other series already studied, whose results are expressed in terms of digamma function, are also generalized. Furthermore, integrals that involve confluent hypergeometric series and generalized Jacobi's functions are evaluated so that several known results come forth as particular cases.

1. INTRODUCCION

Recientemente se encontró que la suma de varias series infinitas podían expresarse en términos de la función digamma. En los trabajos de investigación presentados por Kalla y Al-Saqabi [3] y Srivastava [10] se consideró este tipo de series cuyas sumas sirven de apoyo al Análisis Matemático con aplicaciones en el Análisis Numérico y en la Teoría de Probabilidades.

Otra de las relaciones funcionales que se obtiene es el estudios sobre integrales de la forma

$$\int_a^b (\ln x)^{\nu} P(x)\, dx$$

donde $P(x)$ es un polinomio ortogonal y ν un entero positivo.

Varios autores se han dedicado al estudio de esta clase de integral.

En el presente trabajo se consiguen resultados más generales estudiando integrales con funciones hipergeométricas confluentes y funciones generalizadas de Jacobi cuyos resultados vienen expresados en términos de las funciones hipergemétricas y digamma y, para casos particulares, se encuentran integrales que involucran Polinomios de Laguerre, Jacobi, Rice, etc.

2. SUMA DE ALGUNAS SERIES INFINITAS

Se tiene el siguiente resultado clásico, bastante conocido, que da la suma de una serie infinita en términos de la función digamma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{n(c)_n} = \Psi(c) - \Psi(c-a)$$

con $\mathrm{Re}(c-a) > 0$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$

Esta fórmula fue redescubierta al tratar de calcular sumas de series infinitas usando el cálculo fraccional.

Kalla y Al-Saqabi [3] aportaron una demostración alternativa sin aplicar los operadores del cálculo fraccional y, obtuvieron además nuevos resultados valiéndose del mismo procedimiento.

Utilizando el método de Kalla y Al-Saqabi [3] se derivan las sumas de las siguientes series infinitas

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n(1+a-b)_n (a+1)_n} =$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma(1+a)}{2^a \Gamma(1+\frac{a}{2})\Gamma(\frac{1+a}{2})}$$

$$\left[\Psi(1+\frac{a}{2}) + \Psi(1+a-b) - \Psi(1+a) - \Psi(1+\frac{a}{2}-b)\right]$$

con Re(a-2b)>-2.

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n(a+1)_n (b+1)_n} =$$

$$\frac{a}{a-b}\,[\Psi(1+b)+\gamma] - \frac{b}{a-b}\,[\Psi(1+a)+\gamma]$$

con $a \neq b$ y γ es la constante de Euler-Mascheroni.

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)_n}{n(b)_n 2^n} =$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma(b)}{2^b \Gamma(\frac{b}{2})\Gamma(\frac{1+b}{2})}\left[\Psi(\frac{b+1}{2}) - \Psi(\frac{b}{2})\right]$$

con $b \neq 0,-1,-2,\ldots.$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (1+\frac{a}{2})_n (-1)^n}{n(\frac{a}{2})_n (1+a)_n} =$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma(1+a)}{2^a \Gamma(1+\frac{a}{2})}\left[\Psi(\frac{1+a}{2}) - \Psi(1+a)\right]$$

con $(1+a) \neq 0,-1,-2,\ldots$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)_n (-1)^n}{n(\frac{1}{2})_n 3^n} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}3$$

Demostración:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n(1+a-b)_n (1+a)_n}$$

$$= \lim_{c\to 0} \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c)_n}{n!(1+a-b)_n (1+a-c)_n}$$

$$= \lim_{c\to 0} \frac{1}{c}\left\{ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, & b, & c \\ 1+a-b, & 1+a-c & \end{matrix} :1\right] -1\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial c}\left\{ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, & b, & c \\ 1+a-b, & 1+a-c & \end{matrix} :1\right]\right\}_{c=0}$$

Usando [8,p.535(21)] se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n(1+a-b)_n (1+a)_n}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma(1+a-b)}{2^a \Gamma(\frac{1+a}{2})\Gamma(1+\frac{a}{2}-b)}\,\frac{\partial}{\partial c}\left\{\frac{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+\frac{a}{2}-b-c)}{\Gamma(1+\frac{a}{2}-c)\Gamma(1+a-b-c)}\right\}_{c=0}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\;\Gamma(1+a)}{2^a \Gamma(\frac{1+a}{2})\Gamma(1+\frac{a}{2})}\left[\Psi(1+\frac{a}{2}) + \psi(1+a-b) - \Psi(1+a) - \Psi(1+\frac{a}{2}-b)\right]$$

con Re(a-2b)>-2.

Aplicando el método de Kalla y Al-Saqabi y usando [8,p.535(16)] en (b), [8,p.491(8)] en (c), [8,p.547(7)] en (d) y [8,p.494(3)] en (e) se obtienen los resultados deseados.

En 1970, Per Karlsson [6] demostró que si $Re(-a)>m_1+m_2+\ldots+m_p-1$ y $m_1, m_2,\ldots,m_p$ son enteros no negativos, entonces

$${}_{p+2}F_{p+1}\left[\begin{matrix} b_1+m_1, & b_2+m_2, & \ldots & b_p+m_p, & b, & a \\ b_1, & b_2, & \ldots & b_p, & b+1 & \end{matrix} :1\right]$$

$$= \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1+b-a)}\,\frac{(b_1-b)_{m_1}(b_2-b)_{m_2}\ldots(b_p-b)_{m_p}}{(b_1)_{m_1}(b_2)_{m_2}\ldots(b_p)_{m_p}}, \; p \in N \quad \ldots.(1)$$

TEOREMA

Si $Re(1+b)>0$, $b_1,b_2,\ldots,b_p \neq 0,-1,-2,\ldots$ y $m_1,m_2,\ldots,m_p$ son enteros no negativos, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b)_n (b_1+m_1)_n \cdots (b_p+m_p)_n}{n(b+1)\,(b_1)_n \cdots (b_p)_n}$$

$$= \frac{(b_1-b)_{m_1} \cdots (b_p-b)_{m_p}}{(b_1)_{m_1} \cdots (b_p)_{m_p}} \left[\Psi(1+b)+\gamma\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Demostración

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b)_n (b_1+m_1)_n \cdots (b_p+m_p)_n}{n(b+1)_n \, (b_1)_n \cdots (b_p)_n}$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (b_1+m_1)_n \cdots (b_p+m_p)_n}{n!(b+1)_n (b_1)_n \cdots (b_p)_n}$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{1}{a} \left\{ {}_{p+2}F_{p+1}\left[\begin{matrix} a, & b, & b_1+m_1, \ldots, & b_p+m_p \\ b+1, & b_1, & b_2, \ldots, & b_p \end{matrix} : 1\right] - 1 \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial a} \left\{ {}_{p+2}F_{p+1}\left[\begin{matrix} a, & b, & b_1+m_1, \ldots, & b_p+m_p \\ b+1, & b_1, & \ldots, & b_p \end{matrix}\right] \right\}_{a=0}$$

Usando (1) se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b)_n (b_1+m_1)_n \cdots (b_p+m_p)_n}{n(b+1)\,(b_1)_n \cdots (b_p)_n}$$

$$= \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(1-a)(b_1-b)_{m_1} \cdots (b_p-b)_{m_p}}{\Gamma(1+b-a)(b_1)_{m_1} \cdots (b_p)_{m_p}} \right\}_{a=0}$$

Resolviendo la derivada parcial y evaluando en $a=0$ se obtiene el resultado (2).

TEOREMA.

Si $Re(a)>m_1+m_2+\ldots+m_p-1$; b_1, $b_2,\ldots$, $b_p \neq 0, -1,-2,\ldots$ y m_1, $m_2,\ldots$, m_p son enteros no negativos, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b_1+m_1)_n \cdots (b_p+m_p)_n}{n(1)_n \, (b_1)_n \cdots (b_p)_n}$$

$$= \Psi(1) + \Psi(b_1) + \ldots + \Psi(b_p) - \Psi(1-a) - \Psi(b_1+m_1) - \ldots - \Psi(b_p+m_p) \quad \ldots(3)$$

Demostración:

Aplicando el método anterior y usando (1) se obtiene (3).

Nota:

Los resultados (2) y (3) generalizan los resultados (i) y (f), respectivamente, demostrados antes por Kalla y Al-Saqabi en [3].

3. INTEGRALES CON FUNCIONES HIPERGEOMETRICAS CONFLUENTES.

En esta sección se evaluarán integrales de la forma

$$M_p(\beta) = \int_0^{\infty} x^{\beta} e^{-x} (\ln x)^p \Phi(a;b:x)\Phi(-n;c:x)dx \quad (4)$$

con $\beta>-1$, $b,c \neq 0,-1,-2,\ldots$, $p=1,2$ y $\Phi(a;b:x)$, $\Phi(-n;c:x)$ son funciones hipergeométricas confluentes.

Para el cálculo de la integral (4) es conveniente estudiar en primer lugar la integral

$$A(\beta) = \int_0^{\infty} x^{\beta} e^{-x} \Phi(a;b:x)\Phi(-n;c:x)dx \quad (5)$$

con $\beta>-1$, $b,c\neq 0,-1\ldots$

Ya que $M_p(\beta) = \dfrac{d^p}{d\beta^p}[A(\beta)]$ (6)

Gatteschi [1] demostró que

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha+\mu} e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x)dx = \frac{(-1)^n \Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\alpha+1)}{n!\Gamma(\mu-n+1)} \quad (7)$$

con $\alpha,\alpha+1>-1$ y $L_n^{(\alpha)}(x)$ es un polinomio generalizado de Laguerre.

De [9,p.200(1)] se tiene que

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \phi(-n;\alpha+1:x),\ \alpha>-1 \quad (8)$$

Sustituyendo (8) en (7) se tendrá que

$$\int_0^{\infty} x^{\beta} e^{-x} \phi(-n;\alpha+1:x)\, dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha-\beta)} \quad (9)$$

con $\alpha+\mu=\beta$, $Re(\beta)>-1$, $\alpha>-1$.

Haciendo $\alpha+1=c$ en (9) resulta que

$$\int_0^\infty x^\beta e^{-x}\phi(-n;c:x)\,dx = \frac{\Gamma(c)\Gamma(\beta+1)\Gamma(c-1-\beta+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(c-1-\beta)} \tag{10}$$

con $Re(\beta)>-1$, $c \neq 0,-1,-2,\ldots$

Para calcular la integral (5) se sustituye el desarrollo serie de la función $\Phi(a;b:x)$, la cual converge para todo valor de x, se cambia el orden de la integral y la suma, lo cual es posible hacerlo por la convergencia absoluta, y resulta

$$A(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!(b)_k} \int_0^\infty x^{\beta+k} e^{-x}\phi(-n;c:x)\,dx$$

con $\beta>-1$, $b,c \neq 0,-1,-2,\ldots$

Si se cambia β por $\beta+k$ en (10) se obtiene el valor de la integral, es decir,

$$A(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!(b)_k} \frac{\Gamma(c)\Gamma(\beta+k+1)\Gamma(c-1-\beta-k+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(c-1-\beta-k)} \tag{11}$$

Usando [11,p.16(3) y p.17(8)] y efectuando las operaciones se obtiene la solución

$$A(\beta) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(\beta+1)\Gamma(c-1-\beta+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(c-1-\beta)} \cdot {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, & \beta+1, & \beta-c+2 \\ b, & \beta+2-c+n & \end{matrix} :1\right] \tag{12}$$

con $\beta>-1$, $b,c \neq 0,-1,-2,\ldots,(\beta+2-c-n) \neq 0,-1,-2,\ldots$

Por (6) se tendrá que

$$M_1(\beta) = \int_0^\infty x^\beta e^{-x}(\ln x)\,\Phi(a;b:x)\Phi(-n;c:x)dx$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(\beta+1)\Gamma(c-1-\beta+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(c-1-\beta)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(\beta+1)_k(\beta-c+2)_k}{k!(b)_k(\beta+2-c-n)_k}$$

$$[\Psi(\beta+k+1)-\Psi(c-1-\beta-k+n)+\Psi(c-1-\beta-k)]$$

con $(c-1-\beta-k) \neq 0,-1,\ldots,(1-n)$ si $n\geq 1$, $\beta\geq -1$, $b,c\neq 0,-1,-2,$ (13)

Derivando $M_1(\beta)$ respecto de β resulta que

$$M_2(\beta) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(\beta+1)\Gamma(c-1-\beta+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(c-1-\beta)} \times$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(\beta+1)_k(\beta-c+2)_k}{k!(b)_k(\beta+2-c-n)_k} \times$$

$$\{[\Psi(\beta+k+1)-\Psi(c-1-\beta-k+n)+\Psi(c-1-\beta-k)]^2 +$$

$$+ \Psi'(\beta+k+1)-\Psi'(c-1-\beta-k+n)+\Psi'(c-1-\beta-k)\} \tag{14}$$

con $(c-1-\beta-k) \neq 0,-1,\ldots,(1-n)$ si $n\geq 1$, $\beta\geq -1$, $b,c\neq 0,-1,\ldots$

NOTA:

Las fórmulas obtenidas son bastantes generales y engloban, como casos particulares, resultados publicados recientemente por Gatteschi [1], Kalla y Conde [4] y Pittaluga y Sacripante [7].

4. INTEGRALES CON FUNCIONES GENERALIZADAS DE JACOBI

En esta sección se presenta un estudio sobre integrales que están relacionadas con el producto de dos funciones generalizadas de Jacobi y definidas mediante

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}\left(c,p,\frac{1-x}{2}\right) = \frac{(1+\alpha)_\nu}{\Gamma(\nu+1)} \cdot {}_3F_2\left[\begin{matrix} -\nu, & \nu+\lambda, & c \\ p, & \alpha+1 & \end{matrix} : \frac{1-x}{2}\right] \tag{15}$$

con $\lambda=\alpha+\beta+1$.

$$P_\mu^{(\rho,\sigma)}\left(d,q,\frac{1-x}{2}\right) = \frac{(1+\rho)_\mu}{\Gamma(\mu+1)} \cdot {}_3F_2\left[\begin{matrix} -\mu, & \mu+\tau, & d \\ q, & \rho+1 & \end{matrix} : \frac{1-x}{2}\right] \tag{16}$$

con $\tau = \rho+\sigma+1$, ν,μ arbitrarios.

Se evalúan integrales de la forma

$$R^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma} =$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^a(1+x)^b P_\nu^{(\alpha,\beta)}\left(c,p,\frac{1-x}{2}\right)P_\mu^{(\rho,\sigma)}\left(d,q,\frac{1-x}{2}\right)dx \tag{17}$$

con $Re(a)>-1$, $Re(b)>-1$, $\alpha,\beta,\rho,\sigma>-1$, $Re(q-\sigma-d)>0$ junto con sus derivadas parciales respecto de los parámetros a y b.

Para calcular (17) se sustituye (16) en la integral, se cambia el orden de la integral y la suma, lo cual es posible por la convergencia absoluta ya que $Re(q-\sigma-d)>0$, y evaluando la integral según el resultado [2,p.124(9)] se obtiene

$$R^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma} =$$

$$2^{a+b+1}\frac{(1+p)_{\mu}(1+\alpha)_{\nu}\Gamma(b+1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)\Gamma(a+b+2)} \times$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mu)_k(\mu+\tau)_k(d)_k(a+1)_k}{k!(q)_k(\rho+1)_k(a+b+2)_k}\cdot$$

$$_4F_3\left[\begin{matrix} -\nu, & \alpha+\beta+\nu+1, & c, & a+k+1 \\ \alpha+1, & p, & a+b+k+2 & \end{matrix} : 1\right] \qquad (18)$$

con $Re(a)>-1$, $Re(b)>-1$, $\alpha,\beta,\rho,\sigma>-1$, $\tau = \rho+\sigma+1$, $\mu+\rho+\sigma>0$.

Si se deriva (18) respecto del parámetro a y se denota la integral mediante

$$L^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma}$$

se obtiene que

$$L^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma} =$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^a(1+x)^b[\ln(1-x)]$$

$$P^{(\alpha,\beta)}_{\nu}(c,p,\frac{1-x}{2})P^{(\rho,\sigma)}_{\mu}(d,q,\frac{1-x}{2})dx$$

$$= (\ln 2)\, R^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma} +$$

$$2^{a+b+1}\frac{(1+\rho)_{\mu}(1+\alpha)_{\nu}\Gamma(b+1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)\Gamma(a+b+2)} \times$$

$$\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mu)_k(\mu+\tau)_k(d)_k(a+1)_k}{k!(q)_k(\rho+1)_k(a+b+2)_k}\cdot$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\nu)_l(\nu+\alpha+\beta+1)_l(c)_l(a+k+1)_l}{i!(\alpha+1)_l(p)_l(a+b+k+2)_l} \times$$

$$[\Psi(a+k+i+1) - \Psi(a+b+k+i+2]\} \qquad (19)$$

con $Re(a)>-1$, $Re(b)>-1$; $\alpha,\beta,\rho,\sigma>-1$, $\tau=\rho+\sigma+1$.

Análogamente si se denota mediante

$$W^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma}$$

la integral que resulta de derivar la ecuación (18), respecto de b, entonces se encuentra que

$$W^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma}$$

$$= \int_{-1}^{1}(1-x)^a(1+x)^b$$

$$[\ln(1+x)]P^{(\alpha,\beta)}_{\nu}(c,p,\frac{1-x}{2})P^{(\rho,\sigma)}_{\mu}(d,q,\frac{1-x}{2})dx$$

$$[\ln 2+\psi(b+1)]\, R^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma} -$$

$$2^{a+b+1}\frac{(1+\rho)_{\mu}(1+\alpha)_{\nu}\Gamma(b+1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)\Gamma(a+b+2)} \times$$

$$\{(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\mu)_k(\mu+\tau)_k(d)_k(a+1)_k}{k!(q)_k(\rho+1)_k(a+b+2)_k} \times$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\nu)_l(\alpha+\beta+\nu+1)_l(c)_l(a+k+1)_l}{i!(\alpha+1)_l(p)_l(a+b+k+2)_l} \times$$

$$[\Psi(a+b+k+i+2)]\} \qquad (20)$$

con $Re(a)>-1$, $Re(b)>-1$, $\alpha,\beta,\rho,\sigma>-1$ y $\tau=\rho+\sigma+1$.

Usando los resultados (19) y (20) se pueden calcular las siguientes integrales:

$$X^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma}$$

$$= \int_{-1}^{1}(1-x)^a(1+x)^b[\ln(1-x^2)]$$

$$P^{(\alpha,\beta)}_{\nu}(c,p,\frac{1-x}{2})P^{(\rho,\sigma)}_{\mu}(d,q,\frac{1-x}{2})dx$$

$$= L^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma} + W^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma} \qquad (21)$$

$$Y^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma}$$

$$= \int_{-1}^{1}(1-x)^a(1+x)^b\left[\ln(\frac{1-x}{1+x})\right]$$

$$P^{(\alpha,\beta)}_{\nu}(c,d,\frac{1-x}{2})P^{(\rho,\sigma)}_{\mu}(d,q,\frac{1-x}{2})dx$$

$$= L^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma} - W^{a,b,c,d,p,q}_{\nu,\mu,\alpha,\beta,\rho,\sigma} \qquad (22)$$

NOTA:

- Si $\nu=0$ en (18), (19), (20), (21) y (22) se obtendrán los resultados (9), (10), (11), (12) y (13) encontrados por Kalla [2].

- Si c=p y d=q en (18) se obtienen integrales que involucran el producto de dos funciones de Jacobi.

- Si ν=n y μ=m en (18) con n y m enteros no negativos, se obtienen integrales que involucran el producto de dos Polinomios Generalizados de Rice [5].

- Si c=p, d=q, μ=0 y ν=n, donde n es un entero no negativo, entonces se obtienen las integrales evaluadas por Gatteschi [1].

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] GATTESCHI, L.: On some Orthogonal Polynomial Integrals. Math. Comp. Vol. 35, 1980, p.1291-1298.

[2] KALLA, S.L.: Integrals of Generalized Jacobi Functions. Proc. Nat. Acad. Sci. India,58(A), 1988, 123-128.

[3] KALLA, S.L.- AL-SAQABI, B.: Summation of certain infinite series with digamma functions. C.R. Acad. Bulgare Sci. Vol. 41, No. 11, 1989, 15-17.

[4] KALLA, S.L.- CONDE, S.: Algunos resultados sobre polinomios ortogonales. Colección Premio Andrés Bello. Editorial de la Universidad del Zulia, Maracaibo, 1984.

[5] KALLA, S.L.- MUNOT, P.C.: Some Formulae Involving Generalized Rice Polynomials, Revista Mat. Univ. Tucumán, 24(A), 1974, 67-71.

[6] KARLSSON, P.: Hypergeometric Functions with Integral Parameter Differences. Journal of Math. Physics, Vol. 12, No.2, 1971, 270-271.

[7] PITTALUGA, G.- SACRIPANTE, L.: Some results on Laguerre Polynomials. Tamkang Jour. Math., 1989, 67-74.

[8] PRUDNIKOV, A.P.- BRYCHKOV JU, A.- MARICHEV, O.I.: Integral and Series. Supl. Chapters. Nauka, Moscow, 1986.

[9] RAINVILLE, E.: Special Functions. The Macmillan Co., New York, 1960.

[10] SRIVASTAVA, H.M.- KALLA, S.L.- AL-SAQABI,B.: A certain family of infinite series associated with the gamma functions. Journ. Appl. Math. Anal., 1990.

[11] SRIVASTAVA, H.M.- KARLSSON, P.W.: Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Ellis Horwood Ltd., 1985.

Recibido el 03 de Octubre de 1990