Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia
Vol. 14, No. 1, Edición Especial, 1991

MAGDA G. de ZAMORA
SHYAM L. KALLA
Facultad de Ingeniería
División de Postgrado
Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela

UN ESTUDIO SOBRE LAS FUNCIONES CILINDRICAS INCOMPLETAS

RESUMEN

En este trabajo se obtienen desarrollos en serie de las funciones Cilíndricas Incompletas $E_\nu^+(w,z)$, $J_\nu(w,z)$ y $H_\nu(w,z)$ expresándolos en términos de ciertas funciones especiales, como la función Hipergeométrica de Gauss $F(a,b;c;z)$, la función Hipergeométrica confluente $E_2(a,b;c;x,y)$ ó como un caso particular de la función Hipergeométrica Kampé de Fériet. Además se presentan fórmulas de recurrencia, las cuales establecen relaciones entre las funciones Cilíndricas Incompletas de Orden ν, $\nu+1$, $\nu-1$ y su primera derivada con respecto a z. Por último, se demuestran algunas propiedades que cumplen estas funciones como: periodicidad, simetría, etc. Tales propiedades son muy importantes para la tabulación de estas funciones ya que reducen el campo de valores de los parámetros ν, w, z. Se mencionan algunos casos particulares.

ABSTRACT

This paper deals with the series expansions of the Incomplete Cylindrical functions $E_\nu^+(w,z)$, $J_\nu(w,z)$ and $H_\nu(w,z)$ in terms of Gauss' hypergeometric function and confluent hypergeometric function of two variables. Further, some recurrence relations for ICF are obtained, expressing the relationship between functions of order ν, $\nu+1$ and $\nu-1$. Some other simple properties are established, which may be useful to reduce the parameter range for their tabulation.

1. INTRODUCCION

Las FCI son las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel no homogénea y ellas pueden definirse de diferentes maneras al considerarse la representación integral de forma Poisson, forma Bessel ó forma Sonine-Schlaefli. En este trabajo se consideran las FCI $E_\nu^+(w,z)$, la función de Bessel Incompleta (FBI) $J_\nu(w,z)$ y la función de Struve incompleta (FSI) $H_\nu(w,z)$, todas de orden ν definidas según su representación integral de tipo Poisson [5], así:

$$E_\nu^+(w,z) = \frac{2\, z^\nu}{A_\nu} \int_0^w e^{iz\cos t}\, \operatorname{sen}^{2\nu} t \; dt \quad .... \quad (1)$$

$$J_\nu(w,z) = \frac{2\, z^\nu}{A_\nu} \int_0^w \cos(z\cos t)\, \operatorname{sen}^{2\nu} t \; dt \quad .... \quad (2)$$

$$H_\nu(w,z) = \frac{2\, z^\nu}{A_\nu} \int_0^w \operatorname{sen}(z\cos t)\, \operatorname{sen}^{2\nu} t \; dt \quad .... \quad (3)$$

Válidas para todo valor complejo de z, w y para valores de ν tales que $\mathrm{Re}(\nu+\frac{1}{2}) > 0$

donde $A_\nu = 2^\nu\, \Gamma(\nu+\frac{1}{2})\, \Gamma(\frac{1}{2})$

Nótese que :

$$E_\nu^+(w,z) = J_\nu(w,z) + i\, H_\nu(w,z) \quad .... \quad (4)$$

Para $w = \frac{\pi}{2}$, (2) y (3) se reducen a la función de Bessel y Struve respectivamente.

Son muchos los investigadores que recientemente se han abocado al estudio de estas funciones, entre ellos podemos citar: Yu. V. Vaisleib [9] quien obtuvo expansiones asintóticas uniformes para FCI de tipo Poisson $E_\nu^+(w,z)$ y $H_\nu(w,z)$. B.G. Korenev [7] determina las soluciones particulares de la ecuación de Bessel no homogénea $\nabla_\nu\, u = z^{\nu+1}\, z_\mu(\beta z^\nu)$ donde z_μ es una función cilíndrica y ∇_μ es el operador diferencial de Bessel. Muestra que cuando $Z_\mu(\beta z^\nu) = kJ_\mu(\beta z^\nu)$ una solución particular es $E_\nu^+(w,z)$ con $\beta = \cos w$. Leda Galué [4] obtiene operadores de integración fraccional cuyo núcleo es la función de Bessel Incompleta $J_\nu(w,z)$. Deriva además algunas propiedades de los mismos. Shyam, Kalla y Bader Al-Saqabi [6] presentan desarrollos en serie de la FBI en términos de la función Hipergeométrica de Gauss

F(a,b;c;x) y de otras funciones especiales. Obtuvieron también las transformadas de Laplace, Mellin, Hankel y Meyer de la FBI, algunas relaciones de recurrencia y la función está tabulada para algunos valores específicos de los parámetros.

En este trabajo presentamos algunos resultados de las FCI definidas según (1), (2) y (3):

- Obtenemos desarrollos en serie en términos de la función Hipergeométrica de Gauss F(a,b;c;x), expresándolos de varias meneras por la aplicación de algunas fórmulas de transformación de F(a,b;c;x).

-Derivamos relaciones de recurrencia que relacionan las FCI de orden ν, $\nu+1$ y $\nu-1$ con sus primera derivada con respecto a la variable z.

- Demostramos propiedades de periodicidad con respecto a w y simetría con respecto a w y z.

2. DESARROLLOS EN SERIE

Considerando las series:

$$\cos(z\cos t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m} \cos^{2m} t}{(2m)!} \quad y$$

$$\operatorname{sen}(z\cos t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1} \cos^{2m+1} t}{(2m+1)!}$$

y sustituyendo la primera en (2) y la segunda en (3) obtenemos que:

$$J_\nu(w,z) = \frac{z^\nu}{A_\nu} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m,\nu}(w) \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} \quad .... \quad (5)$$

$$H_\nu(w,z) = \frac{z^\nu}{A_\nu} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1,\nu}(w) \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad .... \quad (6)$$

donde $A_\nu = 2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})$, $\operatorname{Re}(\nu+\frac{1}{2}) > 0$

$$y \quad C_{m,\nu}(w) = 2 \int_0^w \cos^m t \operatorname{sen}^{2\nu} t \, dt =$$

$$\int_0^{\operatorname{sen}^2 w} u^{\nu-\frac{1}{2}} (1-u)^{m-\frac{1}{2}} du = B_{\operatorname{sen}^2 w} (\nu+\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}) \quad ... \quad (7)$$

$$\text{siendo } B_x(b,c) = \int_0^x t^{b-1} (1-t)^{c-1} \, dt = b^{-1} x^b F(b,1-c;b+1;x)$$

la función Beta incompleta [1]

entonces

$$C_{m,\nu}(w) = \frac{\operatorname{sen}^{2\nu+1} w}{\nu+\frac{1}{2}} F(\frac{1-m}{2}, \nu+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \operatorname{sen}^2 w) \quad .... \quad (8)$$

Por (4), (5) y (6) tenemos que:

$$E_\nu^+(w,z) = \frac{z^\nu}{A_\nu} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,\nu}(w) \frac{i^m z^m}{m!} \quad .... \quad (9)$$

y por (8):

$$J_\nu(w,z) = \frac{z^\nu \operatorname{sen}^{2\nu+1} w}{(\nu+\frac{1}{2}) A_\nu} \sum_{m=0}^{\infty} F(\frac{1}{2}-m, \nu+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \operatorname{sen}^2 w) \frac{(-z^2)^m}{(2m)!} \quad .... \quad (10)$$

$$H_\nu(w,z) = \frac{z^\nu \operatorname{sen}^{2\nu+1} w}{(\nu+\frac{1}{2}) A_\nu} \sum_{m=0}^{\infty} F(-m, \nu+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \operatorname{sen}^2 w) \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad .... \quad (11)$$

$$E_\nu^+(w,z) = \frac{z^\nu \operatorname{sen}^{2\nu+1} w}{(\nu+\frac{1}{2}) A_\nu} \sum_{m=0}^{\infty} F(\frac{1-m}{2}, \nu+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \operatorname{sen}^2 w) \frac{i^m z^m}{m!} \quad .... \quad (12)$$

válidas si $\operatorname{Re}(\nu+\frac{1}{2}) > 0$

Haciendo $w = \frac{\pi}{2}$ en (10), (11) y (12), sustituyendo A_ν y considerando que [8]

$$F(b,c;d;1) = \frac{\Gamma(d)\,\Gamma(d-c-b)}{\Gamma(d-b)\,\Gamma(d-c)}, \quad \operatorname{Re}(d-c-b) > 0$$

obtenemos que [3,8]

$$J_\nu(\frac{\pi}{2}, z) = \frac{z^\nu}{2^\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{\Gamma(\nu+m+1)\ m!} = J_\nu(z)$$

$$H_\nu(\frac{\pi}{2}, z) = \frac{z^\nu}{2^\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2}+m)\ \Gamma(m+\frac{3}{2})} = H_\nu(z)$$

$$E_\nu^+(\frac{\pi}{2}, z) = J_\nu(z) + i\ H_\nu(z)$$

Haciendo uso de transformaciones lineales de la función Hipergeométrica de Gauss, obtenemos diferentes formas de desarrollos en serie de las FCI de tipo Poisson.

Por ejemplo usando en (10) y (11) los siguientes resultados [8]

$$\text{a) } F(b,c;d;z) = \frac{\Gamma(d)\ \Gamma(d-b-c)}{\Gamma(d-b)\ \Gamma(d-c)} F(b,c;b+c-d+1;1-z)$$

$$+ (1-z)^{d-b-c} \frac{\Gamma(d)\ \Gamma(b+c-d)}{\Gamma(b)\ \Gamma(c)} F(d-b,d-c;1-b-c+d;1-z)$$

$$\text{b) } F(b,c;d;z) = (1-z)^{-c} F(d-b;c;d; \frac{z}{z-1})$$

$$\text{c) } F(b,c;d;z) = (1-z)^{d-b-c} F(d-b,d-c;d;z) \ \ldots \qquad (13)$$

obtenemos respectivamente que:

$$J_\nu(w,z) = J_\nu(z) - \frac{z^\nu}{A_\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \cos^{2m+1} w$$

$$B(m+\frac{1}{2},1)\ F(\frac{1}{2}-\nu,m+\frac{1}{2};m+\frac{3}{2}; \cos^2 w) \frac{(-z^2)^m}{(2m)!} \ \ldots \qquad (14)$$

$$H_\nu(w,z) = H_\nu(z) - \frac{z^\nu}{A_\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \cos^{2m+2} w$$

$$B(m+1,1)\ F(\frac{1}{2}-\nu,m+1;m+2; \cos^2 w) \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} \ \ldots \qquad (15)$$

Sustituyendo (14) y (15) en (4):

$$E_\nu^+(w,z) = J_\nu(z) + i\ H_\nu(z)$$

$$- \frac{z^\nu}{A_\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \cos^{m+1} w\ B(\frac{m+1}{2},1)$$

$$F(\frac{1}{2}-\nu, \frac{m+1}{2}; \frac{m+3}{2}; \cos^2 w) \frac{i^m z^m}{m!} \ \ldots \qquad (16)$$

todas válidas si $Re(\nu + \frac{1}{2}) > 0$.

Aplicando la transformación [8, pág. 247 (9.5.1)] al segundo término de (14) y (15) respectivamente y sustituyendo el desarrollo en serie de la función Hipergeométrica de Gauss en cada caso tenemos que:

$$J_\nu(w,z) = J_\nu(z) - \frac{2z^\nu}{A_\nu} \operatorname{sen}^{2\nu-1} w \cos w \quad x$$

$$E_2(\frac{1}{2}-\nu,1; \frac{3}{2}; -\cot g^2 w; \frac{-z^2 \cos^2 w}{4}) \ \ldots \qquad (17)$$

$$H_\nu(w,z) = H_\nu(z) - \frac{z^{\nu+1} \operatorname{sen}^{2\nu-1} w \cos^2 w}{A_\nu}$$

$$F^{0:1;2}_{1:1;0} \left[\begin{matrix} —:1;\ \frac{1}{2}-\nu,1\ ; \\ 2:\frac{3}{2};——\ ; \end{matrix} \ -\frac{z^2 \cos^2 w}{4}\ ;\ -\cot g^2 w \right] \qquad (18)$$

válidas si $Re(\nu+\frac{1}{2}) > 0$, $|\cot g^2 w| < 1$, $|\frac{z^2\cos^2 w}{4}| < 1$

donde $E_2(b,c;d;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(b)_m (c)_m}{(d)_{m+n}} \frac{x^m y^n}{m!\ n!}$ es la función Hipergeométrica confluente de dos variables [10] y

$$F^{p:r,u}_{q:s,v} \left[\begin{matrix} (A_p):(C_r);(E_u) \\ (b_q):(d_s);(f_v) \end{matrix} : x;y \right]$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} (A_j)_{m+n} \prod_{j=1}^{r} (C_j)_m \prod_{j=1}^{u} (E_j)_n}{\prod_{j=1}^{q} (b_j)_{m+n} \prod_{j=1}^{s} (d_j)_m \prod_{j=1}^{v} (f_j)_n} \frac{x^m\ y^n}{m!\ n!}$$

es la función de Kampé de Fériet [10].

Aplicando (13) a (10) y (11) respectivamente y considerando la definición de la serie Kampé de Fériet, obtenemos que:

$$J_{\nu}(w,z) = \frac{z^{\nu}\ \mathrm{sen}^{2\nu+1} w \cos w}{(\nu+\frac{1}{2})\ A_{\nu}}$$

$$F^{1:0,1}_{0:2,1}\left[\begin{matrix}\nu+1: —;\ 1 \\ —: \frac{1}{2}, \nu+1; \nu+\frac{3}{2}\end{matrix}\ ;\ -\frac{z^2\cos^2 w}{4}\ ;\ \mathrm{sen}^2 w\right] \quad (19)$$

$$H_{\nu}(w,z) = \frac{z^{\nu+1}\ \mathrm{sen}^{2\nu+1} w \cos^2 w}{(\nu+\frac{1}{2})\ A_{\nu}}$$

$$F^{1:0,1}_{0:2,1}\left[\begin{matrix}\nu+\frac{3}{2}: — —;\ 1 \\ —: \nu+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \nu+\frac{3}{2}\end{matrix}\ ;\ -\frac{z^2\cos^2 w}{4}\ ;\ \mathrm{sen}^2 w\right] \quad (20)$$

válidas si $\mathrm{Re}(\nu+\frac{1}{2}) > 0$

Si en (15), sustituímos el desarrollo en serie de la función Hipergeométrica de Gauss y usamos la serie Kampé de Fériet, obtenemos:

$$H_{\nu}(w,z) = H_{\nu}(z) - \frac{z^{\nu+1} \cos^2 w}{A_{\nu}}$$

$$F^{1:0,1}_{1:1;0}\left[\begin{matrix}1: —;\ \frac{1}{2}-\nu \\ 2: \frac{3}{2}\ ;\ —\end{matrix}\ ;\ -z^2\frac{\cos^2 w}{4}\ ;\ \cos^2 w\right] \ldots \quad (21)$$

$$\mathrm{Re}(\nu+\frac{1}{2}) > 0$$

Algunos resultados establecidos aquí están en [2,6]. Se cree que los resultados (6), (11), (15), (18), (19), (20) y (21) son nuevos, detalles de los mismos en [5].

3. RELACIONES DE RECURRENCIA

Considerando (1) y (2) podemos obtener que:

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\nu} J_{\nu}(w,z)\right]$$

$$= z^{\nu} J_{\nu-1}(w,z) - \frac{2\ z^{2\nu-1}}{A_{\nu}} \cos(z \cos w)\ \mathrm{sen}^{2\nu-1} w \cos w \quad \ldots. \quad (22)$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\nu} H_{\nu}(w,z)\right]$$

$$= z^{\nu} H_{\nu-1}(w,z) - \frac{2\ z^{2\nu-1}}{A_{\nu}} \mathrm{sen}(z \cos w)\ \mathrm{sen}^{2\nu-1} w \cos w \quad \ldots. \quad (23)$$

Por (4) y sustituyendo (22) y (23)

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\nu} E^{+}_{\nu}(w,z)\right]$$

$$= z^{\nu} E^{+}_{\nu-1}(w,z) - \frac{2\ z^{2\nu-1}}{A_{\nu}} e^{iz \cos w}\ \mathrm{sen}^{2\nu-1} w \cos w \quad \ldots. \quad (24)$$

válidas para $\mathrm{Re}(\nu+\frac{1}{2}) > 0$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu} J_{\nu}(w,z)\right]$$

$$= -z^{-\nu} J_{\nu+1}(w,z) - \frac{2\ \mathrm{sen}(z \cos w)\ \mathrm{sen}^{2\nu+1} w}{A_{\nu+1}} \quad \ldots. \quad (25)$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu} H_{\nu}(w,z)\right]$$

$$= -z^{-\nu} H_{\nu+1}(w,z) + \frac{2\ \cos(z \cos w)\ \mathrm{sen}^{2\nu+1} w}{A_{\nu+1}} \quad \ldots. \quad (26)$$

Por (4) y sustituyendo (25) y (26):

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu} E^{+}_{\nu}(w,z)\right]$$

$$= -z^{-\nu} E^{+}_{\nu+1}(w,z) + \frac{2i\ e^{iz\cos w}\ \mathrm{sen}^{2\nu+1} w}{A_{\nu+1}} \quad \ldots. \quad (27)$$

válidas si $\mathrm{Re}(\nu + \frac{1}{2}) > 0$

Desarrollando los lados izquierdos de (22), (23), (24), (25), (26) y (27) obtenemos; respectivamente:

$$J'_{\nu}(w,z) + \frac{\nu}{z} J_{\nu}(w,z) - J_{\nu-1}(w,z)$$

$$= \frac{-2\ z^{\nu-1}}{A_{\nu}} \cos(z \cos w)\ \mathrm{sen}^{2\nu-1} w \cos w \quad \ldots. \quad (28)$$

$$H'_{\nu}(w,z) + \frac{\nu}{z} H_{\nu}(w,z) - H_{\nu-1}(w,z)$$

$$= \frac{-2\ z^{\nu-1}}{A_{\nu}} \mathrm{sen}(z \cos w)\ \mathrm{sen}^{2\nu-1} w \cos w \quad \ldots. \quad (29)$$

$$\frac{d}{dz} E_\nu^+(w,z) + \frac{\nu}{z} E_\nu^+(w,z) - E_{\nu-1}^+(w,z)$$

$$= \frac{-2\, z^{\nu-1}}{A_\nu} e^{iz \cos w} \operatorname{sen}^{2\nu-1} w \cos w \quad \ldots. \quad (30)$$

$$\operatorname{Re}(\nu + \tfrac{1}{2}) > 0$$

$$J'_\nu (w,z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(w,z) + J_{\nu+1}(w,z) =$$

$$\frac{-2\, z^\nu \operatorname{sen}(z \cos w) \operatorname{sen}^{2\nu+1} w}{A_{\nu+1}} \quad \ldots. \quad (31)$$

$$H'_\nu (w,z) - \frac{\nu}{z} H_\nu(w,z) + H_{\nu+1}(w,z) =$$

$$\frac{2\, z^\nu \cos(z \cos w) \operatorname{sen}^{2\nu+1} w}{A_{\nu+1}} \quad \ldots. \quad (32)$$

$$\frac{d}{dz} E_\nu^+(w,z) - \frac{\nu}{z} E_\nu^+(w,z) + E_{\nu+1}^+(w,z) =$$

$$\frac{2i\, z^\nu e^{iz \cos w} \operatorname{sen}^{2\nu+1} w}{A_{\nu+1}} \quad \ldots. \quad (33)$$

$$\operatorname{Re}(\nu + \tfrac{1}{2}) > 0$$

Sumando miembro a miembro (28) y (31); (29) y (32); (30) y (33) respectivamente:

$$J_{\nu-1}(w,z) - 2\, J'_\nu(w,z) + J_{\nu+1}(w,z) =$$

$$\frac{2\, z^{\nu-1}}{A_\nu} \cos(z \cos w) \operatorname{sen}^{2\nu-1} w \cos w$$

$$+ \frac{2\, z^\nu}{A_{\nu+1}} \operatorname{sen}(z \cos w) \operatorname{sen}^{2\nu+1} \quad \ldots. \quad (34)$$

$$H_{\nu-1}(w,z) - 2\, H'_\nu(w,z) - H_{\nu+1}(w,z) =$$

$$- \frac{2\, z^\nu}{A_{\nu+1}} \cos(z \cos w) \operatorname{sen}^{2\nu+1} w$$

$$+ \frac{2\, z^{\nu-1}}{A_\nu} \operatorname{sen}(z \cos w) \operatorname{sen}^{2\nu-1} w \cos w \quad (35)$$

$$E_{\nu-1}^+(w,z) - 2 \frac{d}{dz} E_\nu^+(w,z) - E_{\nu+1}^+(w,z) =$$

$$\left(\frac{-2i\, z^\nu \operatorname{sen}^{2\nu+1} w}{A_{\nu+1}} + \frac{2\, z^{\nu-1} \operatorname{sen}^{2\nu-1}}{A_\nu} \cos w \right) e^{iz \cos w}$$

$$\ldots. \quad (36)$$

$$\operatorname{Re}(\nu + \tfrac{1}{2} > 0$$

Restando miembro a miembro (28) y (31); (29) y (32); (30) y (33) respectivamente:

$$J_{\nu-1}(w,z) - \frac{2\nu}{z} J_\nu(w,z) + J_{\nu+1}(w,z) =$$

$$\frac{2\, z^{\nu-1}}{A_\nu} \cos(z \cos w) \operatorname{sen}^{2\nu-1} w \cos w$$

$$- \frac{2\, z^\nu}{A_{\nu+1}} \operatorname{sen}(z \cos w) \operatorname{sen}^{2\nu+1} w \quad \ldots. \quad (37)$$

$$H_{\nu-1}(w,z) - \frac{2\nu}{z} H_\nu(w,z) + H_{\nu+1}(w,z) =$$

$$\frac{2\, z^{\nu-1}}{A_\nu} \operatorname{sen}(z \cos w) \operatorname{sen}^{2\nu-1} w \cos w$$

$$+ \frac{2\, z^\nu}{A_{\nu+1}} \cos(z \cos w) \operatorname{sen}^{2\nu+1} w \quad \ldots. \quad (38)$$

$$E_{\nu+1}^+(w,z) - \frac{2\nu}{z} E_\nu^+(w,z) - E_{\nu-1}^+(w,z) =$$

$$\left[\frac{2i}{A_{\nu+1}} z^\nu \operatorname{sen}^{2\nu+1} w + \frac{2\, z^{\nu-1}}{A_\nu} \operatorname{sen}^{2\nu-1} w \cos w \right] e^{iz \cos w}$$

$$\ldots. \quad (39)$$

$$\operatorname{Re}(\nu + \tfrac{1}{2} > 0$$

Algunos resultados establecidos aquí están en [2,6].

Se cree que los resultados (23), (24), (26), (27), (29) y (32) son nuevos, detalles de los mismos en [5].

3. PROPIEDADES ADICIONALES

De (1) y (2) se deduce que:

$$J_\nu(w,-z) = e^{i\pi\nu} J_\nu(w,z) \quad \ldots. \quad (40)$$

$$H_\nu(w,-z) = e^{i\pi(\nu+1)} H_\nu(w,z) \quad \ldots. \quad (41)$$

Por (4) y sustituyendo (40) y (41)

$$E_\nu^+(w,-z) = e^{i\nu\pi} E_\nu^-(w,z) \quad .... \quad (42)$$

si ν es un entero n,

$$J_n(w,-z) = (-1)^n J_\nu(w,z) \quad .... \quad (43)$$

$$H_n(w,-z) = (-1)^{n+1} H_n(w,z) \quad .... \quad (44)$$

$$E_n^+(w,-z) = (-1)^n E_n^-(w,z) \quad .... \quad (45)$$

en especial si n = 0

$$J_0(w,-z) = J_0(w,z) \quad .... \quad (46)$$

$$H_0(w,-z) = - H_0(w,z) \quad .... \quad (47)$$

$$E_0^+(w,-z) = E_0^-(w,z) \quad .... \quad (48)$$

$$J_\nu(-w,z) = -J_\nu(w,z)\ ,\ \nu \in \mathbb{Z} \quad .... \quad (49)$$

$$H_\nu(-w,z) = -H_\nu(w,z)\ ,\ \nu \in \mathbb{Z} \quad .... \quad (50)$$

Por (4) y sustituyendo (49) y (50)

$$E_\nu^+(-w,z) = -E_\nu^+(w,z)\ ,\ \nu \in \mathbb{Z} \quad .... \quad (51)$$

$$J_\nu(w+2n\pi,z) = J_\nu(w,z) + 2n\ J_\nu(\pi,z)\ ,\ \nu \in \mathbb{Z},\ w \text{ real} \quad .... \quad (52)$$

$$H_\nu(w+2n\pi,z) = H_\nu(w,z) + 2n\ H_\nu(\pi,z)\ ,\ \nu \in \mathbb{Z},\ w \text{ real} \quad .... \quad (53)$$

$$E_\nu^+(w+2n\pi,z) = E_\nu^+(w,z) + 2n\ E_\nu^+(\pi,z)\ ,\ \nu \in \mathbb{Z},\ w \text{ real} \quad .... \quad (54)$$

Los resultados (40), (43), y (46), están en [6].

Los resultados (41), (42), (44), (45), (47-54) se creen nuevos. Ver detalles en [5].

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] ABRAMOWITZ AND STEGUN: Handbook of mathematical functions. Dover Publications, Inc., New York.

[2] AGREST, M.M. Y MAKSIMOW, M.S.: Theory of Incomplete cylindrical functions and their applications. Springer-Verlag, New York. 1971.

[3] BABISTER, A. W.: Trascendental functions satisfying non-homogeneous linear differential equations.

[4] GALUE, L. LEDA: Operadores integrales que involucran funciones Cilíndricas Incompletas. Maracaibo: L.U.Z., Facultad de Ingeniería, División de Postgrado, 1987.

[5] GONZALEZ DE ZAMORA, MAGDA: Funciones cilíndricas incompletas y algoritmos computacionales. Maracaibo: L.U.Z., Facultad de Ingeniería, División de Postgrado, 1990.

[6] KALLA, S.L. Y BADER AL-SAGABI: Some results on incomplete cylindrical functions. Anales Acad. Nac. Ciencias Exactas, Física, Mat. Arg. 1989.

[7] KORENEV, B.G.: Thermoelasticity and particular solutions of the inhomogeneous Bessel equation. V.A. Kucheremko Central Scientific Research Institute of Building Design. Moscou Dokl-Akad-Nauk, SSSR, 210. No. 4, pp. 795-798, (June 1973).

[8] LEBEDEV, N.N.: Special functions and their applications. New Jersey: Prentice-Hall, 1985.

[9] VAISLEIB, YU. V.: Asymptotic representations of incomplete cylinder functions. ZH. Vychisl Mat. mat. Fiz. 11, 3, 758-761, 1971.

[10] SRIVASTAVA Y KARLSSON: Multiple gaussian Hypergeometric series. Ellis Horwood Limited Publishers-Chichester, New York, 1985.

Recibido el 30 de Marzo de 1990