Rev. Téc. Ing., Univ. Zulia
Vol. 13, No. 1, 1990

NOTA TECNICA
NOTA SOBRE UN TRABAJO RESPECTO A UN PROCESAMIENTO TERMICO

A. BATTIG
CONICET
Tucumán, Argentina

M.V. DE LUCCIONI
Universidad Nacional de Tucumán
Tucumán, Argentina

RESUMEN

Un problema de conducción térmica en un cilindro finito donde las temperaturas en la superficie lateral del cilindro y las superficies de las bases son fijadas , y la temperatura inicial conocida, fue tratado por BATTIG, KALLA, LUCCIONI usando las transformadas finitas Fourier-seno y Hankel de primera especie. En esta Nota se hace uso de esa solución para el problema particular tratado por VERA D. y ROMERO F., comparando los valores numéricos dados por ellos con los que se obtienen por la solución obtenida por BATTIG, KALLA y LUCCIONI.

ABSTRACT

The problem of thermal conduction in a finite cylinder where the temperature on the lateral surface of the cylinder and the surfaces of the bases are prescribed and the known initial temperature has been treated by BATTIG, KALLA and LUCCIONI using finite sine Fourier transform and finite Hankel transform. In this paper that solution is used to treat the particular problem dealt by VERA D. y ROMERO F. The numerical values given by these authors are compared to those obtained by the solution given by BATTIG, KALLA y LUCCIONI and applied to this particular case.

SOLUCION DEL PROBLEMA

Consideramos la conducción térmica en un cilindro finito de radio a y altura h. Las superficies z = 0 y z = h son mantenidas a una temperatura prescripta y la distribución inicial de temperatura en la superficie r = a 0<z<h es conocida. El problema consiste en obtener la función temperatura θ(r,z,t) que satisfaga a la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial\theta}{\partial t} \qquad (1)$$

donde k es el coeficiente de difusividad del medio material contenido en el cilindro.

Las condiciones inicial y de borde a que debe satisfacer la solución de (1) son las siguientes

$$\begin{aligned} \theta(r,z,o) &= f(r,z) \quad , \quad z > o \quad , \quad t = o \\ \theta(r,o,t) &= g(r,t) \quad , \quad z = o \quad , \quad t > o \\ \theta(r,h,t) &= p(r,t) \quad , \quad z = h \quad , \quad t > o \\ \theta(a,z,t) &= q(z,t) \quad , \quad r = a \quad , \quad t > o \end{aligned} \qquad (2)$$

La ecuación diferencial (1) es resuelta por aplicación de las transformadas finitas Fourier-seno y Hankel de primera clase. Si la función temperatura θ(r,z,t) cumple con la condición de Dirichlet esas transformadas están definidas según SNEDDON, I.N. [3]

$$\theta_B(r,n,t) = \int_o^h \theta(r,z,t) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{h}\, dz \qquad (3)$$

con el teorema de inversión

$$\theta(r,z,t) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_s\ (r,n,t) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{h} \qquad (3a)$$

y la transformada de Hankel de primera clase

$$\bar{\theta}(\xi_i,z,t) = \int_0^a r\ \theta(r,z,t)\ J_o(\xi_i r)\, dr \qquad (4)$$

con el teorema de inversión

$$\theta(r,z,t) = \frac{2}{a^2} \sum_i \bar{\theta}(\xi_i,z,t) \frac{J_o(\xi_i r)}{[J_1(\xi_i a)]^2} \qquad (4a)$$

donde ξ son las raíces de la ecuación transcendente $J_o(\xi_i a) = 0$ y J_o, J_1 son las funciones de Bessel de primera clase.

Aplicando a la ecuación (1) las transformadas (3) y (4) con las correspondientes fórmulas de inversión (3a) y (4a) con las condiciones dadas en (2), la solucióm de la ecuación (1) se expresa

$$\Theta(r,z,t) =$$

$$\frac{2}{a^2} \sum_{1} \frac{J_0(\xi_1, r)}{[J_1(\xi_1, a)]^2} \; \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{f}_s(\xi_1 n).e^{-k(\xi_1^2 + \alpha_n^2)t}$$

$$+ G(\xi_1,n,t) \text{ sen } \alpha_n z \tag{5}$$

siendo

$$G(\xi_1,n,t) =$$

$$k \int_0^t a\, \xi_1 q(n,x)\, J_1(a\xi_1) + \bar{H}(\xi_1,n,x).e^{+k(\xi_1^2 + \alpha_n^2)(x-t)} dx$$

$$\bar{H}(\xi_1,n,t) = \frac{\alpha n}{h} \; [\bar{g}(\xi_1,n,t) + (-1)^{n+1} \; \bar{p}(\xi_1,n,t)]$$

y

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{h}$$

SOLUCION PARTICULAR

Consideremos ahora que las condiciones inicial y de borde dadas en (2) toman los siguientes valores

$$f(r,z,o) = T_o \; ; \; g(r,o,t) = p(r,h,t) = q(a,z,t) = T_1$$

que son las mismas a las adoptadas por [2], siendo T_o la temperatura inicial de la sustancia y T_1 es la temperatura que debe adquirir la misma para su esterilización.

Teniendo en cuenta que las transformadas finitas Fourier-seno y Hankel son según [3]

$$\bar{f}_s(\xi_1,n) = \frac{T_0}{\alpha_n} \left[1 + (-1)^{n+1} \right] \frac{a}{\xi_1} \; J_1(a\xi_1)$$

$$\bar{g}(\xi_1,t) = \bar{p}(\xi_1,t) = \bar{q}(\xi_1,t) = \frac{a\, T_1}{\xi_1} \, J_1(a\xi_1)$$

entonces la solución (5) se escribe en la forma siguiente

$$\Theta(r,z,t) = \frac{4}{a,h} \sum_{1} \frac{J_0(\xi_1 r)}{J_1(\xi_1 a)} \; \frac{1}{\xi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$$

$$\left[(T_0 - T_1).e^{-k(\xi_1^2 + \alpha_n^2)\, t} + T_1\right]$$

$$\left[1 + (-1)^{n+1} \right] \text{sen}^{\alpha_n . z}$$

Con la fórmula (6) se ha calculado la función temperatura $\Theta(r,z,t)$ del medio material contenido en el cilindro para el punto central del mismo, es decir para las coordenadas r=0 y z=h/2. Se han considerado los dos casos tratados por [2] para las mismas sustancias y las mismas dimensiones geométricas de los cilindros. El valor del coeficiente de difusividad k se ha tomado del trabajo [2], el que fue determinado experimentalmente según se indica en dicho trabajo.

El resultado de la computación de la función $\Theta(r,z,t) = \Theta(0,h/2,t)$ por medio de la ecuación (6) viene dado en las tablas 1 y 2, donde también se dan los correspondientes valores de la temperatura experimentales y los calculados por el M.D.F.I. usado por [2].

OBSERVACIONES

Las diferencias entre los datos experimentales y los valores obtenidos según la solución dada por el M.T.F., para la sustancia cangrejo, muestran una anomalía en los primeros 15 minutos verificándose luego una buena aproximación entre ellos. Esta anomalía también se pone de manifiesto con los métodos usados en (2).

Comparando los valores de las tablas dadas en [2] con los obtenidos con M.T.F., se nota una mejor coincidencia de estos con los dados con M.D.F.I.

TABLA N° 1

Tiempo medida (min)	Temp. M.T.F. (•F)	M.D.F.I. Temp. calculada (•F)	Temp. calculada (•F)
0	46.40	46.40	46.40
3	90.50	50.14	51.58
6	100.40	74.06	76.70
9	112.00	106.11	108.70
12	116.00	134.76	135.87
15	123.50	156.95	157.43
18	136.40	173.18	173.31
21	150.80	184.76	184.73
24	164.00	192.94	192.83
27	172.00	198.67	193.54
30	179.60	202.69	202.56
33	186.50	205.50	205.38
36	190.20	207.46	207.36
39	198.50	208.83	208.74
42	198.80	209.78	209.72
45	201.00	210.45	210.40
48	203.10	210.92	210.88
51	205.10	211.25	211.21
54	206.20	211.47	211.45
57	207.40	211.63	211.61
60	208.40	211.74	211.73
63	209.00	211.82	211.81
66	209.45	211.87	211.85
70	210.40	211.92	211.86
73	210.60	211.95	211.88
80	211.00	211.98	211.89
83	211.50	211.98	211.95
90	211.80	211.99	212.00

(M.D.F.I.) : METODO DE DIFERENCIA FINITA IMPLICITO
(M.T.F.) : METODO DE TRANSFORMADAS FINITAS

TABLA N° 2

COMPARACION DE TEMPERATURAS MEDIDAS Y CALCULADAS POR LOS AUTORES VERA DALICA, S. Y ROMERO FERRER D. [2] CON LAS CALCULADAS USANDO LA SOLUCION DE ESTE TRABAJO

T_0 = 60.00 •F a = 3.09 pulg. alfa = 0.3654 pulg^2/min

T_1 = 250.00 •F h = 7.00 pulg.

Para el punto r = 0 ; z = h/2

Tiempo (min)	Temp. medida (•F)	M.T.F. Tem.calculada (•F)	M.D.F.I. Temp.calculada (•F)
1	60.00	60.00	60.00
3	60.00	104.84	107.65
6	108.00	184.75	184.90
9	175.00	222.79	222.48
12	217.00	238.75	238.49
15	234.50	245.35	245.19
18	241.50	248.08	248.06
21	244.60	249.21	249.16
24	246.20	249.67	249.65
27	246.80	249.87	249.85
30	247.20	249.94	249.94
33	247.45	249.98	249.98
36	247.70	249.99	249.99
39	248.10	250.00	250.00
42	248.80	250.00	250.00

(M.D.F.I.) : METODO DE DIFERENCIA FINITA IMPLICITO
(M.T.F.) : METODO DE TRANSFORMADAS FINITAS

AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen al Dr. R.Luccioni la tarea empeñada en la elaboración del programa de computación que permitió obtener los resultados numéricos dados en las tablas 1 y 2. El proceso de cómputo fue realizado con el computador VAX 11/780 del Departamento de Computación de la Universidad Nacional de Tucumán.

REFERENCIAS

[1] BATTIG, A.; KALLA, S.L. and LUCCIONI, R.:"Production of Heat in a finite circular cylinder". Universidad de Lourenco Marques, Vol. IV, Serie A 1972.

[2] DATTICA, S.V. y FERRER, D.R.: "Predicción de la Temperatura del punto frío en alimentos enlatados durante procesamiento térmico". Rev.Téc.Ing., Univ.Zulia., Vol. 11, No. 1, 1988.

[3] SNEDDON, I.N.: "Fourier Transform", McGraw-Hill, New York (1951).

Recibido el 16 de Enero de 1990