

Rev.Téc.Ing., Univ.Zulia  
Vol.3 , N°2 , 1980

## NOTA TECNICA

### UN METODO DIRECTO PARA LA SOLUCION DE LA ECUACION INTEGRAL DE MOLODENSKY

M.I. Pastorino de López Domínguez  
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología  
Universidad Nacional de Tucumán  
Argentina

Como integrante del grupo de trabajo de las cátedras de Geodesia Superior y Geofísica y en mi carácter de responsable en el área matemática de dicho grupo y además, siendo de interés de aquellas poder resolver el cálculo de las desviaciones de la vertical  $\xi, \eta$  a partir del potencial perturbador  $T$  es que trabajé sobre la Ecuación Integral de Molodensky, aceptando las hipótesis planteadas pero no sucediendo lo mismo con los artificios y series auxiliares usados.

Partiremos de la Ecuación Integral de Molodensky (Heiskanen and Moritz, 1967 p.304), del trabajo de Helmut Moritz, "Introduction to Molodensky's Theory" publicado por el "Bollettino di Geodesia Scienze Affini" Anno XXXIV N°2, 1975.

$$\Delta g = 2\pi \Phi \cos \beta - \iint_{\sigma} \left[ \frac{3R}{2\ell} + \frac{R^2 (h - h_p)}{\ell^3} \right] \Phi \sec \beta d\sigma \quad (1)$$

donde:

$\Delta g$  = anomalía de gravedad referida a la superficie de la Tierra.

$\Phi$  = función auxiliar, de la naturaleza de una densidad de superficie (es la densidad de superficie multiplicada por la constante gravitacional).

$\beta$  = ángulo de inclinación máxima del terreno.

$R$  = radio medio de la tierra.

$\ell$  = distancia entre el punto  $P$  y el punto variable de la superficie de la tierra, al cual le corresponde  $d\sigma$ .

$d\sigma$  = elemento superficial de unidad esférica.

$h$  = elevación topográfica.

A lo largo del trabajo se respeta la aproximación de  $10^{-3}$ , como lo hizo Molodensky, que es del orden de la aproximación esférica, y por lo tanto pondremos:

$l^2 = l_0^2 + (h - hp)^2$  donde  $l_0 = 2R \operatorname{sen} \frac{\psi}{2}$ , siendo  $\psi$  el ángulo al centro de la tierra, es decir, entre  $P$  y el punto variable. Además llamamos  $\chi = \Phi \operatorname{sec} \beta$ .

Volviendo a

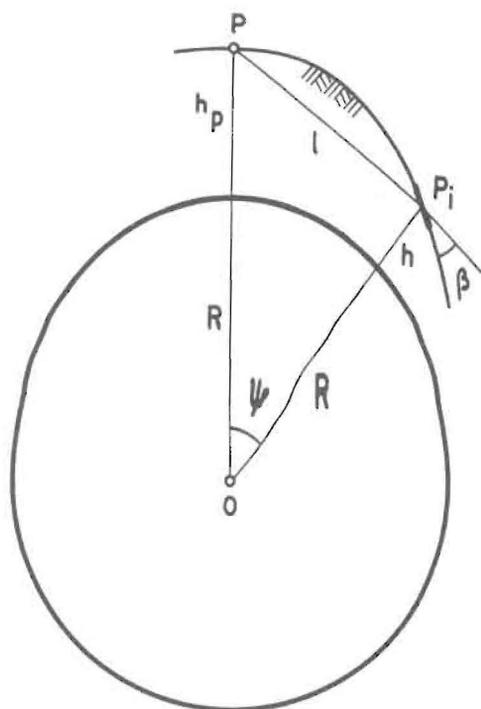
$$l^2 = l_0^2 + (h - hp)^2 = l_0 \left[ 1 + \left( \frac{h - hp}{l_0} \right)^2 \right]$$

y teniendo en cuenta que podemos escribir

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_0} \left[ 1 + \left( \frac{h - hp}{l_0} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2)$$

y además

$$\frac{1}{l^3} = \frac{1}{l_0^3} \left[ 1 + \left( \frac{h - hp}{l_0} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \quad (3)$$



desarrollando (2) y (3) en series de potencias con coeficientes binomiales

$$a_n = \binom{-\frac{1}{2}}{n} \quad \text{y} \quad b_n = \binom{-\frac{3}{2}}{n}$$

obtenemos

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_0} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{h - h_p}{l_0} \right)^{2n} \right]$$

$$\frac{1}{l^3} = \frac{1}{l_0^3} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left( \frac{h - h_p}{l_0} \right)^{2n} \right]$$

Sustituimos  $\frac{h - hp}{\ell_0} = z$  y con las simplificaciones anteriores volvemos a la ecuación inicial (1) quedando:

$$\Delta g = 2\pi \chi \cos^2 \beta - \iint_{\sigma} \left[ \frac{3R}{2\ell_0} \left( 1 + \sum_{h=1}^{\infty} a_h z^{2h} \right) + \frac{R^2 z}{\ell_0^2} \left( 1 + \sum_{h=1}^{\infty} b_h z^{2h} \right) \right] \chi d\sigma.$$

Desarrollando ambas series y luego agrupando en potencias iguales de  $z$ , tendremos:

$$\Delta g = 2\pi \chi \cos^2 \beta - R \iint_{\sigma} \left[ \left( \frac{3}{2} a_0 + \frac{Rz}{\ell_0} b_0 \right) + \left( \frac{3}{2} a_1 + \frac{Rz}{\ell_0} b_1 \right) z^2 + \left( \frac{3}{2} a_2 + \frac{Rz}{\ell_0} b_2 \right) z^4 + \dots \right] \frac{\chi}{\ell_0} d\sigma$$

es decir

$$\Delta g = 2\pi \chi \cos^2 \beta - R \iint_{\sigma} \left[ \sum_{h=0}^{\infty} \left( \frac{3}{2} a_h + \frac{Rz}{\ell_0} b_h \right) z^{2h} \right] \frac{\chi}{\ell_0} d\sigma$$

Estudiamos el comportamiento de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3}{2} a_n + \frac{Rz}{\ell_0} b_n \right) z^{2n} \quad (4)$$

Si  $|z| = \left| \frac{h-hp}{\ell_0} \right| < 1$  o lo que es lo mismo  $|h-hp| < |\ell_0|$  la serie converge y en este caso podremos tener en cuenta un número  $n$  de términos, es decir que en lugar de tener  $\sum_{n=0}^{\infty}$  podremos poner  $\sum_{n=0}^n$  y más aún como sabemos que el error que nos fijamos es del orden de  $10^{-3}$ , acotando el resto de la serie queda definido el número de términos de aquella a calcular y en consecuencia podríamos precisar el último  $G_n$  apropiado.

Ahora, si  $|h-hp| > |\ell_0|$ , la serie diverge. Como conclusión de este estudio de convergencia de la serie (4), podríamos decir que esta solución para la Ecuación Integral de Molodensky puede ser aplicada a cualquier tipo de topografía quedando claro que los resultados obtenidos en zonas llanas podrán tener la precisión permitida por el error de  $10^{-3}$ .

Además haremos  $\Delta g = G_n$  y tendremos entonces:

$$G_n = 2\pi \chi_n \cos^2 \beta - R \iint_{\sigma} \left[ \sum_{n=0}^n \left( \frac{3}{2} a_n + \frac{Rz}{\ell_0} b_n \right) z^{2n} \right] \frac{\chi_n}{\ell_0} d\sigma \quad (5)$$

donde:

$$G_0 = 2\pi \chi_1 \cos^2 \beta - R \iint_{\sigma} \left( \frac{3}{2} a_0 + \frac{Rz}{\ell_0} b_0 \right) \frac{\chi_1}{\ell_0} d\sigma$$

$$G_1 = 2\pi \chi_2 \cos^2 \beta - R \iint_{\sigma} \left[ \left( \frac{3}{2} a_0 + \frac{Rz}{\ell_0} b_0 \right) + \left( \frac{3}{2} a_1 + \frac{Rz}{\ell_0} b_1 \right) z^2 \right] \frac{\chi_2}{\ell_0} d\sigma$$

$$G_2 = 2\pi \chi_3 \cos^2 \beta - R \iint_{\sigma} \left[ \left( \frac{3}{2} a_0 + \frac{Rz}{\ell_0} b_0 \right) + \left( \frac{3}{2} a_1 + \frac{Rz}{\ell_0} b_1 \right) z^2 + \right. \\ \vdots \\ \left. + \left( \frac{3}{2} a_2 + \frac{Rz}{\ell_0} b_2 \right) z^4 \right] \frac{\chi_3}{\ell_0} d\sigma$$

Una solución de la ecuación integral (5) está dada en una aproximación esférica por Stokes; de la siguiente forma:

$$\chi_n = \frac{\sec^2 \beta}{2\pi} G_n + \frac{\sec^2 \beta}{8\pi^2} \iint_{\sigma} G_n S(\psi) d\sigma \quad (6)$$

donde  $S(\psi)$  es la función de Stokes.

Obtendremos ahora, el potencial perturbador a partir del dado en Heiskanen and Moritz, 1967, p.303; es decir:

$$T = GN = R^2 \iint_{\sigma} \frac{\Phi}{\ell} d\sigma$$

en nuestro caso

$$T = R^2 \iint_{\sigma} \left[ \sum_{h=0}^n \left( \frac{3}{2} a_h + \frac{Rz}{\ell_0} b_h \right) z^{2h} \right] \frac{\chi}{\ell_0} d\sigma$$

y teniendo en cuenta la solución dada por (6) Stokes de la ecuación

integral (5) resulta ser:

$$T_i = \frac{R}{G\pi} \iint_{\sigma} G_i S(\psi) d\sigma \quad (7)$$

es decir que:

$$T_0 = \frac{R}{G\pi} \iint_{\sigma} G_0 S(\psi) d\sigma$$

$$T_1 = \frac{R}{G\pi} \iint_{\sigma} G_1 S(\psi) d\sigma \quad (8)$$

⋮

$$T_n = \frac{R}{G\pi} \iint_{\sigma} G_n S(\psi) d\sigma$$

obviamente la precisión de  $T$  dependerá de la convergencia o no de la serie dada por (4) resultando por lo tanto las potencias perturbadoras por iteración los de mayor grado con mayor precisión. A diferencia de la solución expresada en la solución conocida como series de Molodensky

$$S_0 = T_0$$

$$S_1 = T_0 + T_1$$

$$S_2 = T_0 + T_1 + T_2$$

⋮

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + \dots + T_n + \dots = \sum_{h=0}^{\infty} T_h$$

Nuestra aproximación cero no guarda correspondencia con la solución a la fórmula de Stokes ya que la misma está formada por sobre elevación y pendiente, con ésto se espera encontrar mayor precisión en la aplicación.

A partir de (7) podemos calcular las desviaciones de la vertical  $\xi, \eta$  derivando el potencial perturbador en la dirección apropiada, siendo:

$$N = \frac{T}{G} \quad \text{ó} \quad \Gamma = \frac{T}{\gamma} \quad (9)$$

donde  $N$  son alturas al geoide y  $\Gamma$  es la anomalía de altura y además

$$\xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \phi} \quad \text{y} \quad \eta = -\frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial N}{\partial \lambda} \quad (10)$$

longitud respectivamente).

La precisión de  $\xi$  y  $\eta$  también dependerán de la convergencia o no de la serie (4).

Para realizar el trabajo de cálculo de la fórmula de Stokes, en la (6) fue necesario recurrir a la integración numérica de aquella, ésto implica cambiar la integral por una suma finita, todo este proceso crea la necesidad de tabular primeramente  $S(\psi)$  para luego poder hacer el cálculo final. La tabulación de  $S(\psi)$  es un trabajo ya realizado pero que en la actualidad no disponemos de él para su consulta.

En lo que respecta al resto de los datos se utilizan cartas topográficas e isoanómalas. Las anomalías de gravedad usadas son las de Faye y Bouguer.

Deseo expresar mi agradecimiento, a los investigadores Profesores Ingenieros Hugo Marcelo Posse y Nardo Gerónimo López, por el valioso asesoramiento que he recibido sobre la interpretación geodésica del problema.