Rev.Téc.Ing., Univ.Zulia
Vol.3 , N°1 , 1980

INTRODUCCION A LA TEORIA DE LOS OPERADORES DE MIKUSINSKI PARA LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CON APLICACIONES

A. Steiner
Instituto de Matemáticas
Universidad de Zürich
Suiza

RESUMEN

Damos una introducción breve sobre los operadores de Mikusinski (cocientes de convolución). Además aplicamos estos operadores para resolver algunas ecuaciones diferenciales encontradas frecuentemente en aplicaciones.

ABSTRACT

We give a brief introduction about the theory of operators of Mikusinski (convolution quotients). Further these operators are used to solve some differential equations which are encountered frequently in applications.

1. INTRODUCCION

En el sistema general de transmisión lineal, la salida momentánea equivale a la suma de las señales de entrada anteriores multiplicadas cada una por un factor que depende del espacio de tiempo que las separa de la señal de entrada momentánea:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \,. \tag{1}$$

Tal sistema de transmisión se llama lineal porque las señales de salida se superponen exactamente como las de entrada. La integral (1) se llama la convolución de la función $h(t)$ con la función de entrada $x(t)$.

Es excitante el hecho de que un sistema de transmisión del cual no se sabe nada más que es lineal -cuya razón no vamos a discutir aquí- lo que sería una "caja negra" en el sentido de N. Wiener pueda ser reconocido observando la salida solamente por una entrada muy especial. Se escoge por ejemplo como función de entrada el impulso $x(t) = \delta(t)$.

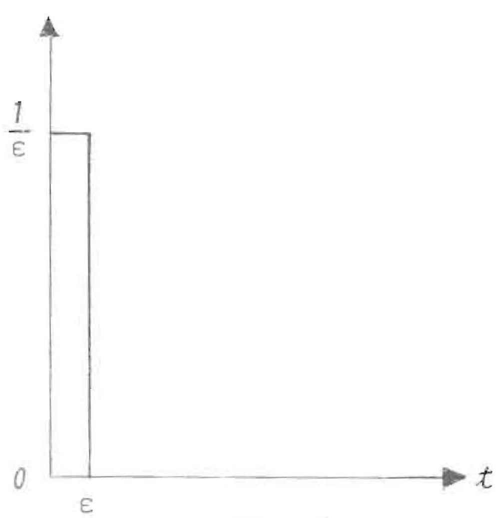

Fig. 1

La salida correspondiente siendo muy pequeño ε se calcula por (1)

$$y(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} h(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{\varepsilon}h(t)\,\varepsilon = h(t)\,,$$

es decir la función de ponderación de nuestro sistema de transmisión lineal que nos permite calcular por una entrada cualquiera $x(t)$ la salida $y(t)$. ¡Con esta única experiencia la "caja negra" se ha puesto una "caja blanca"! La función acertada de esta manera está llamada reacción de impulso del sistema de transmisión lineal (1). Según una propuesta de J. Mikusiński, el descubridor del cálculo de los operadores, $x = \{x(t)\}$ designará en adelante una función, que hay que distinguir claramente del valor de función $x(t)$ en el punto t. En lugar de la complicada integral de convolución que describe un sistema de transmisión lineal general, ponemos ahora simplemente

$$\{y(t)\} = \left\{\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau\right\} =: \{h(t)\}\{x(t)\}\,.$$

Para introducir sistemáticamente el cálculo de los operadores designarán ahora $a = \{a(t)\}$, $b = \{b(t)\}$, $c = \{c(t)\}$,... funciones continuas a valores complejos sobre $0 \leqq t < \infty$. Definimos

$$a + b := \{a(t) + b(t)\}\,,\ ab := \left\{\int_0^t a(t-\tau)\,b(\tau)\,d\tau\right\}. \tag{2}$$

Entonces valen para a, b, c,... las mismas leyes como para los números enteros, en particular

$$ab = ba\,,\ a(bc) = (ab)c\,,\ a(b+c) = ab + ac\,, \tag{3}$$

cuya prueba es fácil contrariamente al <u>teorema de Titchmarsh</u> que es mucho más profundo:

$$ab = \{0\} \Rightarrow a = \{0\} \text{ ó } b = \{0\}\,. \tag{4}$$

El resto no es más que un sencillo ejercicio para un estudiante talentado. Como en el paso de los números enteros a las fracciones se introducen ahora "fracciones de funciones" que se llaman "operadores":

$$\frac{a}{b} \quad (b \neq \{0\}) \tag{5}$$

y se adoptan simplemente las reglas del cálculo de las fracciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \,, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \,, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \,. \tag{6}$$

Hay operadores que son funciones, por ejemplo

$$\frac{\{t^2\}}{\{t\}} = \{2\} \iff \{2\}\{t\} = \left\{\int_0^t 2\tau d\tau\right\} = \{t^2\} \,.$$

Desempeña un papel importante el llamado operador de integración, que es una función también:

$$\ell := \{1\} \,. \tag{7}$$

Se llama así porque con $a = \{a(t)\}$

$$\ell a = \{1\}\{a(t)\} = \left\{\int_0^t a(\tau) d\tau\right\} .$$

El ejemplo clásico de un operador que no sea una función se encuentra en

$$\frac{\{1\}}{\{1\}} = \frac{\ell}{\ell} \,.$$

Este ejemplo nos lleva a hablar de una manera más general de los operadores de números . Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Consideramos operadores del tipo

$$[\alpha] := \frac{\{\alpha\}}{\{1\}} , \qquad (8)$$

que llamamos *operadores de números*. Valen las fórmulas

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta] \ , \ [\alpha][\beta] = [\alpha\beta] . \qquad (9)$$

A base de (9) son supérfluos los corchetes y se escribe simplemente

$$\alpha := [\alpha] = \frac{\{\alpha\}}{\{1\}} = \frac{\{\alpha\}}{\ell} . \qquad (10)$$

¡Los operadores son una generalización no solamente de las funciones sino también de los números complejos! Vamos a dar además la prueba del importante teorema: "*Un operador de número puede ser metido en el paréntesis de llave*" :

$$\alpha\{a(t)\} = \{\alpha\, a(t)\} . \qquad (11)$$

De hecho es

$$\alpha\{a(t)\} = \frac{\{\alpha\}\{a(t)\}}{\ell} = \frac{\left\{\int_0^t \alpha\, a(\tau)\, d\tau\right\}}{\ell} = \frac{\ell\{\alpha\, a(t)\}}{\ell} = \{\alpha\, a(t)\} .$$

LOS OPERADORES 0 Y 1 . Para un operador cualquiera $\frac{a}{b}$ y para los operadores de números 0 y 1 valen

$$0\,\frac{a}{b} = 0 \ , \ \frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b} \ , \ 1\,\frac{a}{b} = \frac{a}{b} . \qquad (12)$$

Hay que observar también que la función $\{0\}$ constituye un caso excepcional: es la única función que, con respecto a la adición y multiplicación, tiene las mismas propiedades como el operador de números 0, puesto que

$$\{0\} = 0 \,, \tag{13}$$

lo que es trivial:

$$\{0\} = 0 := \frac{\{0\}}{\ell} \iff \{0\} = \ell\{0\} = \{0\} \,.$$

En cambio, en los demás casos hay que distinguir estrictamente entre función constante y operador de números.

EL OPERADOR DE DERIVACION s. Los operadores (como las fracciones) pueden ser divididos unos por los otros, a condición que el operador denominador sea $\neq 0$; el cociente es otro operador más. Entonces el operador de derivación

$$s := \frac{1}{\ell} = \frac{\{1\}}{\ell^2} = \frac{\{1\}}{\{t\}} \tag{14}$$

tiene un sentido bien determinado. Muy importante para la aplicabilidad de nuestro cálculo de operadores a la solución de ecuaciones diferenciales es que existan *dos fórmulas* a cuya deducción nos vamos a dedicar ahora.

Si la función $a = \{a(t)\}$ tiene una derivada continua $a' = \{a'(t)\}$ sobre $0 \leq t < \infty$, vale primero

$$\boxed{a' = s a - a(0)} \tag{15}$$

porque

$$a = \{a(t)\} = \left\{\int_0^t a'(\tau)\,d\tau\right\} + \{a(0)\} = \ell a' + \frac{\ell\{a(0)\}}{\ell} = \ell a' + \ell a(0)$$

de donde , siendo $s\ell = 1$, después de multiplicar los dos lados por s , sigue la afirmación. Segundo, entre s y la función exponencial existe la relación

$$\boxed{\frac{1}{s-\alpha} = \left\{e^{\alpha t}\right\}} \tag{16}$$

Para hacer la prueba hay que aplicar a $\left\{e^{\alpha t}\right\}$ la fórmula que se acaba de probar :

$$\alpha\left\{e^{\alpha t}\right\} = s\left\{e^{\alpha t}\right\} - 1 \Rightarrow (s-\alpha)\left\{e^{\alpha t}\right\} = 1 \;;$$

la división de los dos lados por $s - \alpha$ lleva a (16) .

2. UN EJEMPLO TOMADO DE LA HIDROLOGIA

Un estanque de superficie F está alimentado por una cascada y tiene abajo un desagüe . La aportación es de $x = \{x(t)\}$ y el nivel $y = \{y(t)\}$.

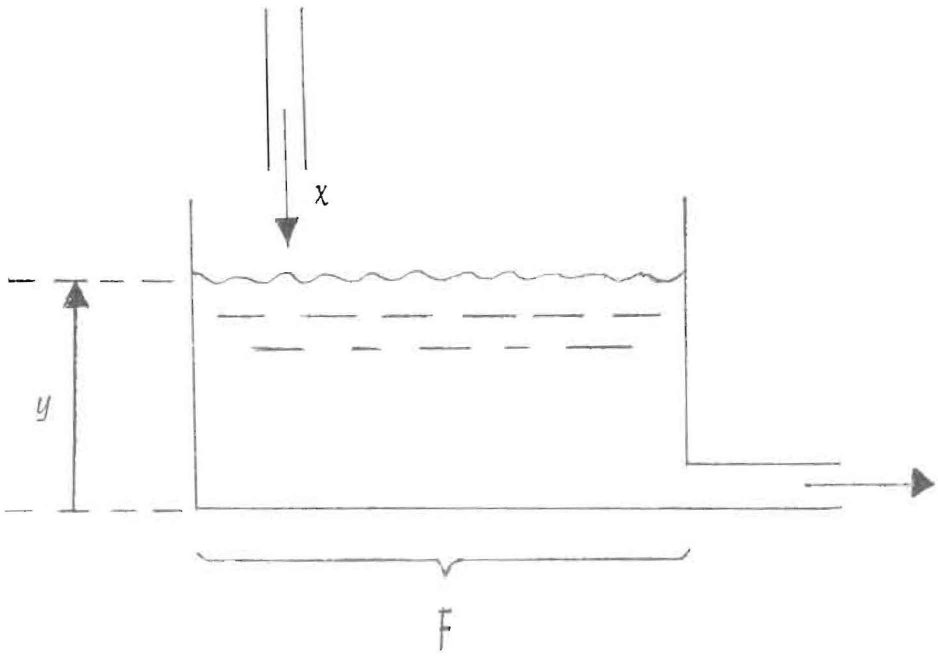

Fig. 2

Con

$$\alpha := \frac{1}{F}$$

y una constante positiva β , que depende de la dimensión del desa - güe, vale la ecuación diferencial

$$y'(t) = \alpha x(t) - \beta y(t) \;,\; y(0) = y_0 \;, \tag{17}$$

que según (15) toma la forma operacional

$$(s+\beta)\, y = a x + y_0$$

y que según (16) lleva enseguida a la solución

$$y = \alpha \frac{1}{s+\beta} x + y_0 \frac{1}{s+\beta} = \left\{ \alpha \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} x(\tau)\, d\tau + y_0\, e^{-\beta t} \right\} . \tag{18}$$

Vamos a suponer ahora que, siendo constante la aportación $x = \{x(t)\} = \{x_0\}$ se llega a un equilibrio caracterizado por $y' = \{y'(t)\} = \{0\}$. Según (17) resulta entonces

$$y = \{y(t)\} = \{y_0\}\ ,\ y_0 = \frac{\alpha}{\beta} x_0\ . \tag{19}$$

Es claro que ahora está satisfecha (18) :

$$\alpha x_0 e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta\tau} d\tau + y_0 e^{-\beta t} = \alpha x_0 e^{-\beta t} \left(\frac{1}{\beta} e^{\beta t} - \frac{1}{\beta} \right) + y_0 e^{-\beta t} = y_0 .$$

¿Qué sucede si dicho equilibrio entre aportación y desagüe es perturbado por un aguacero repentino de cantidad $R\,\delta(t)$?
Para responder a esta pregunta, ponemos como entrada

$$x = \{x(t)\} = \{x_0 + R\delta(t)\} \tag{20}$$

en (18) y obtenemos como salida

$$y = \left\{ y_0 + \alpha R \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}\, \delta(\tau)\, d\tau \right\} = \left\{ y_0 + \frac{R}{F} e^{-\beta t} \right\} . \tag{21}$$

Suan se da cuenta de que la perturbación va igualando:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{R}{F} e^{-\beta t} = 0\ .$$

El desnivel maximal $y - y_0$ con respecto a lo normal es

$$\frac{R}{F}\ .$$

3. EL OPERADOR DE TRANSLACION

Vamos a generalizar la teoría desarrollada hasta ahora incluyendo ciertas funciones discontinuas (ver [2]).

Para $\lambda > 0$ sea $\{H_\lambda\}$ la función que adquiere el valor cero en el intervalo $0 \leqq t < \lambda$ y uno sobre $\lambda \leqq t < \infty$. Se llama función de salto o función de Heaviside.

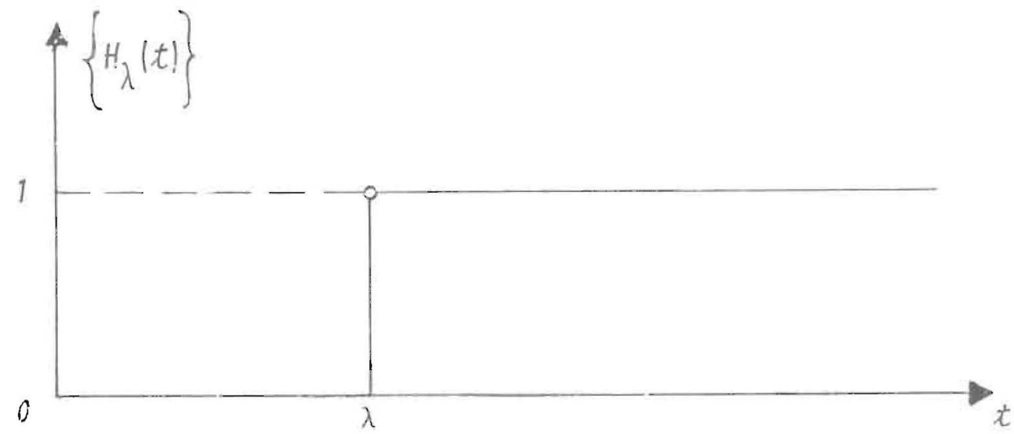

Fig. 3

En el cálculo de los operadores el papel principal no es tanto el de la función de salto que el del operador que está relacionado con ella para la ecuación

$$h^\lambda := s\{H_\lambda(t)\} \quad (\lambda > 0) . \tag{22}$$

Este está denominado operador de translación a base de su propiedad fácil de probar :

$$h^\lambda f = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad 0 \leqq t < \lambda , \\ f(t-\lambda) & \text{para} \quad \lambda \leqq t . \end{cases} \tag{23}$$

Es evidente por verse que

$$h^{\lambda}h^{\mu} = h^{\lambda+\mu} \qquad (\lambda > 0 \ , \ \mu > 0) \ . \tag{24}$$

Ponemos

$$h^{1} = h \quad , \quad h^{0} = 1 = \delta \ . \tag{25}$$

El operador h^{λ} está definido por λ negativos poniendo

$$h^{-\lambda} = \frac{1}{h^{\lambda}} \qquad (\lambda > 0) \ . \tag{26}$$

De ahí (24) está válido para todos los λ , $\mu \in \mathbb{R}$.

4. LA FUNCION δ DE DIRAC

Se observa que según (22) el operador

$$\frac{h^{\lambda}}{s}$$

siendo fijo $\lambda > 0$ es simplemente la función de salto $\{H_{\lambda}(t)\}$.

Es fácil probar la fórmula

$$\frac{1}{s^{2}} \frac{h^{\lambda} - h^{\lambda+\varepsilon}}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{h^{\lambda}}{s} = \{H_{\lambda}(t)\} \ , \tag{27}$$

como se ve por medio de la representación gráfica de su parte izquierda.

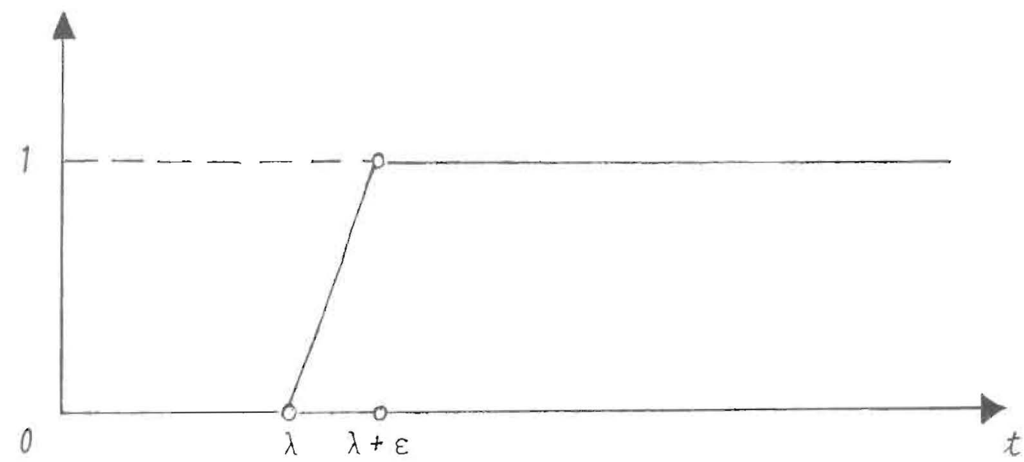

Fig. 4

Multiplicando la parte izquierda de (27) por s, se obtiene la familia de operadores dependientes del parámetro $\varepsilon > 0$:

$$\omega_\varepsilon := \frac{1}{s} \, \frac{h^\lambda - h^{\lambda+\varepsilon}}{\varepsilon} \; . \tag{28}$$

El operador ω_ε posee la representación gráfica siguiente:

Fig. 5

Ponemos

$$a := \ell^2 . \tag{29}$$

Procede de ahí que

$$a\omega_\varepsilon = \ell^2 \omega_\varepsilon = \ell \cdot \frac{1}{s^2} \frac{h^\lambda - h^{\lambda+\varepsilon}}{\varepsilon} ,$$

que posee la representación gráfica

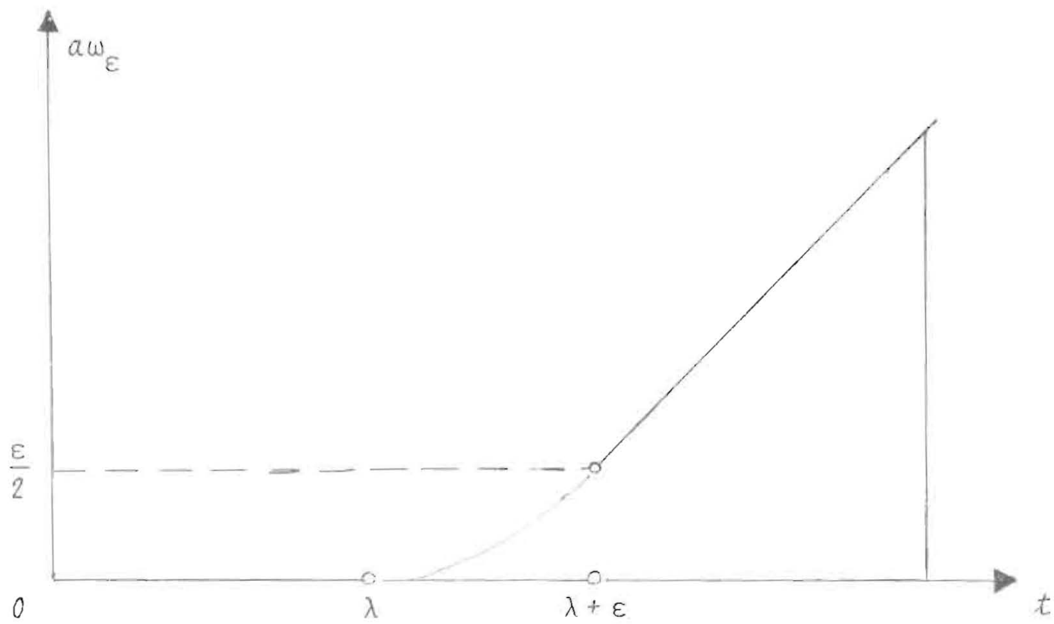

Fig. 6

siendo

$$a\omega_\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t \leq \lambda , \\ \frac{1}{2\varepsilon} (t-\lambda)^2 & \text{para } \lambda \leq t \leq \lambda+\varepsilon , \\ t - \lambda - \frac{\varepsilon}{2} & \text{para } \lambda+\varepsilon \leq t < \infty . \end{cases}$$

Se ve que

$$a\,\omega_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} h^\lambda\{t\} = \frac{h^\lambda}{s^2} .$$

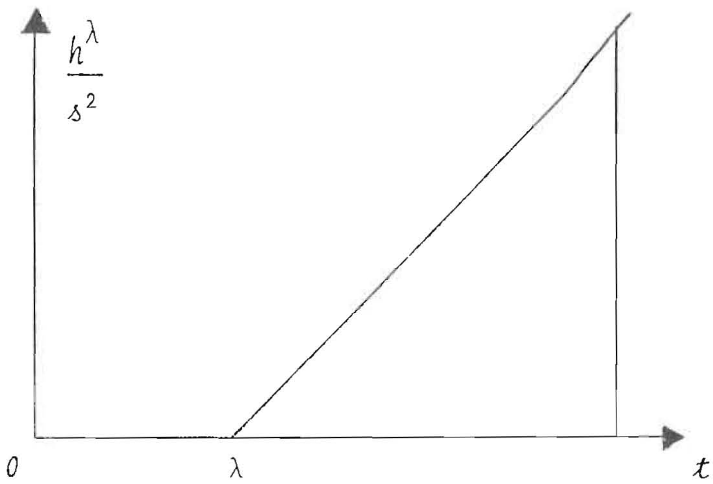

Fig. 7

En el sentido de la topología del cálculo de los operadores se define

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \omega_\varepsilon := \frac{1}{a}\,\frac{h^\lambda}{s^2} = \frac{1}{\ell^2}\,\frac{h^\lambda}{s^2} = h^\lambda .$$

El límite de ω_ε formado en el sentido indicado más arriba se manifiesta como siendo el operador de translación h^λ. Está denominado también función δ de Dirac:

$$h^\lambda = \delta(t-\lambda) . \tag{30}$$

Para $\lambda = 0$ vale

$$h^0 = \delta(t) \ . \tag{31}$$

La función de impulso entonces no es nada más que el elemento unidad del cuerpo de los operadores , o sea el operador de números 1 . Para otras aplicaciones de los cocientes de convolución, ver [1].

REFERENCIAS

[1] KALLA, S.L. y VILORIA, L.: "*Cocientes de Convolución*". Postgrado, Ingeniería, Univ. del Zulia. Publicaciones Internas N°16, 1977.

[2] MIKUSINSKI, J.: "*Operatorenrechnung*". VEB Deutscher Verlag der Wiss. Berlin, 1957.