ISSN 2244-7334 / Depósito legal pp201102ZU3769

Vol. 8 Nº 1 • enero - junio 2018

REDIELUZ

Sembrando la investigación estudiantil

REDIELUZ
ISSN 2244-7334 / Depósito legal pp201102ZU3769
Vol. 8 Nº 1 • enero - junio 2018: 89-95

MODELO DINÁMICO CON EL USO DEL GEOGEBRA PARA EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES SECANTE Y COSECANTE

(Dynamic model with GeoGebra to the study of secant and cosecant functions)

Jean Montero y Xiomara Arrieta
Centro de Estudios Matemáticos y Físicos, Facultad de Humanidades y Educación, Universidad del Zulia, Maracaibo-Venezuela
jmontero865@hotmail.com, xarrieta2410@yahoo.com

RESUMEN

El estudio de las funciones trigonométricas resulta ser muy complejo para los estudiantes de Educación Media, lo que dificulta su aprendizaje significativo. Este trabajo tuvo como objetivo describir un modelo dinámico con el uso del GeoGebra para el estudio de las funciones secante y cosecante. La metodología utilizada es documental, de tipo descriptiva. Se consideró el concepto de inversión de figuras planas debido a su relación con todo par de magnitudes que son inversamente proporcionales, como es el caso de las razones secante y cosecante y sus recíprocas el coseno y seno de un ángulo. Se trabajó con las razones trigonométricas porque las mismas determinan el recorrido de las funciones trigonométricas y sus valores se pueden visualizar fácilmente a través de las medidas de unos segmentos. El software GeoGebra es un recurso didáctico que proporciona un entorno dinámico ideal para interpretar geométricamente las razones trigonométricas, destacando el hecho de la posibilidad de variar el ángulo agudo que determina las longitudes de los segmentos representativos de dichas razones; esto permite visualizar que el rango de valores de la secante y la cosecante de un ángulo nunca está en el intervalo (-1,1), para ciertos valores dichas razones no están definidas, la secante es par y la cosecante es impar y ambas son periódicas. Como consideración final se destaca la importancia de incorporar recursos didácticos novedosos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, permitiendo a los docentes apoyarse en las tecnologías, para facilitar en sus estudiantes el aprendizaje significativo de las funciones trigonométricas.

Palabras clave: Funciones trigonométricas, razones trigonométricas, inversión, proporcionalidad inversa.

ABSTRACT

The study of trigonometric functions turns out to be very complex for Middle School students, which hinders their significant learning. The objective of this work was to describe a dynamic model with the use of GeoGebra for the study of secant and cosecant functions. The methodology used is documentary, descriptive. The concept of inversion of flat figures was considered due to its relationship with all pair of magnitudes that are inversely proportional, as is the case of the secant and cosecant ratios and their reciprocal the cosine and sine of an angle. We worked with the trigonometric ratios because they determine the path of the trigonometric functions and their values can be easily visualized through the measurements of some segments. The GeoGebra software is a didactic resource that provides an

Recibido: 18/04/2018. **Aceptado:** 01/06/2018

ideal dynamic environment to geometrically interpret the trigonometric ratios, highlighting the fact of the possibility of varying the acute angle that determines the lengths of the representative segments of said ratios; this allows visualizing that the secant and cosecant value range of an angle is never in the interval (-1,1), for certain values such reasons are not defined, the secant is even and the cosecant is odd and both are periodic As a final consideration, the importance of incorporating innovative didactic resources in the teaching and learning process is highlighted, allowing teachers to rely on technologies to facilitate in their students the meaningful learning of trigonometric functions.

Keywords: trigonometric functions, trigonometric ratios, inversion, inverse proportionality.

INTRODUCCIÓN

Las funciones trigonométricas resultan ser muy complejas para los estudiantes de Educación Media, particularmente las funciones *secante* y *cosecante,* cuyos recorridos están determinados por los valores de las razones homónimas. La comprensión de estas funciones y sus características, se dificulta para los estudiantes debido quizá, al mayor énfasis que los docentes le dan al estudio de las funciones trigonométricas principales seno, coseno y tangente, además a las limitaciones que tiene el estudio de estas funciones en un ambiente estático, como el pizarrón, ya que se minimizan el universo de posibilidades de su enseñanza y aprendizaje; por lo que se hace necesario el uso de diversos recursos didácticos para promover el aprendizaje significativo en los estudiantes.

En un estudio previo, Díaz y Prieto (2013) han abordado el problema de la comprensión de los signos de las razones *seno*, *coseno* y *tangente* de un ángulo, desde un punto de vista geométrico y apoyados en entornos dinámicos. En su trabajo los autores muestran a través de segmentos asociados a una circunferencia unitaria y cuyas longitudes coinciden con los valores de las razones mencionadas, algunas de sus características principales con la simple variación del ángulo agudo, todo esto realizado con GeoGebra. Al replicar este análisis sobre la *secante* y *cosecante* de un ángulo se observa que las construcciones auxiliares sobre la circunferencia unitaria no representan una ayuda al momento de determinar segmentos representativos a estas últimas razones.

Este problema fue superado incorporando al análisis un concepto matemático olvidado en los programas de Educación Media, como es la *inversión en el plano*, la cual consiste en la reflexión de un objeto respecto a una circunferencia, la misma es conocida como circunferencia de inversión, debido a que su centro y su radio son elementos de la inversión, el primero es denominado *centro de inversión* y el cuadrado del radio se conoce como *potencia de la inversión*.

El concepto de *inversión* es aplicable a cualquier par de magnitudes que se relacionen de manera inversamente proporcional, ya que una propiedad del mismo es que el producto de las distancias entre el centro de inversión y un punto dado y entre el mismo centro y el homólogo del punto reflejado es constante (Reventós, 2003).

Se conoce científicamente que la *secante* y la *cosecante* de un ángulo son las razones trigonométricas recíprocas del coseno y el seno del mismo ángulo, respectivamente, ya que están relacionadas de la siguiente manera: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ y $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, es decir que los productos de la secante con el coseno y de la cosecante con el seno son constantes e iguales uno, el cual sería la potencia de la inversión, si se utiliza la circunferencia unitaria como circunferencia de reflexión; en síntesis, la relación entre las razones trigonométricas y la inversión se establece al asumir como circunferencia de inversión a la unitaria, ya que así la potencia de inversión es uno, que coincide con el producto de dos razones recíprocas.

El trabajo tuvo como objetivo describir un modelo dinámico con el uso del GeoGebra para el estudio de las funciones secante y cosecante.

Las funciones secante y cosecante de un ángulo

La función secante es una función real de variable real que está definida por y = sec x, por lo que, sus pares ordenados están dados por (x, sec x); es decir, su recorrido está formado por los valores de la secante de un ángulo (Duarte *et al.*, 2012).

Características

- Dominio: los reales, menos x = nπ/2, con n entero.

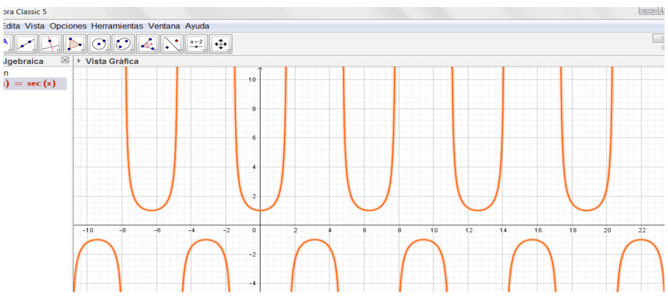
- Recorrido: y ϵ $(-\infty,\ -1] \cup [1,\infty)$
- Periodicidad: es periódica de periodo 2π.
- Ceros: no tiene ceros.
- Paridad: es una función par, ya que sec x = sec (-x) y por lo tanto es simétrica con respecto al eje y.
- Gráfica: su gráfica se muestra en la figura 1.

La función cosecante es una función real de variable real que está definida por y = csc x, por lo que sus pares ordenados están dados por (x, csc x); es decir, su recorrido está formado por los valores de la cosecante de un ángulo (Duarte *et al.*, 2012).

Características

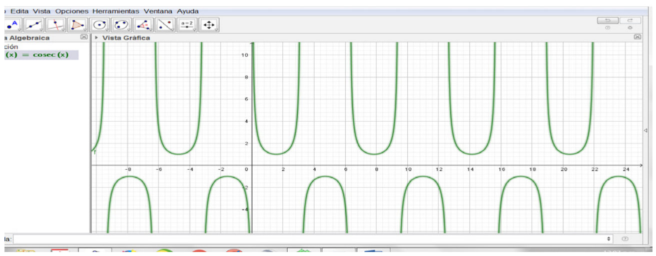
- Dominio: los reales menos α = nπ, con n entero.
- Recorrido: y ϵ $(-\infty,\ -1] \cup [1,\infty)$
- Periodicidad: es periódica de periodo 2π.
- Ceros: no tiene ceros.
- Paridad: es una función impar, ya que –csc α = csc (-α) y por lo tanto es simétrica con respecto al origen.
- Gráfica: su gráfica se muestra en la figura 2.

Figura 1. Gráfica de la función secante de un ángulo, mediante GeoGebra



Fuente: Los autores (2018)

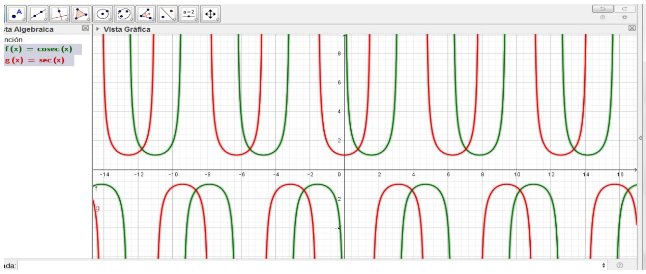
Figura 2. Gráfica de la función cosecante de un ángulo, mediante GeoGebra



Fuente: Los autores (2018)

La comparación entre las gráficas secante y cosecante se muestra en la figura 3, donde se pueden observar sus semejanzas y diferencias.

Figura 3. Comparación de las gráficas de las funciones secante y cosecante de un ángulo, mediante GeoGebra



Fuente: Los autores (2018)

La secante y la cosecante de un ángulo

Al hablar de la secante y la cosecante de un ángulo se hace referencia a las razones trigonométricas recíprocas del coseno y el seno del mismo ángulo (Zill y Wright, 2011).

La secante y la cosecante de un ángulo por ser recíprocas del coseno y el seno del mismo ángulo pueden relacionarse con estas de la siguiente manera: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ y $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

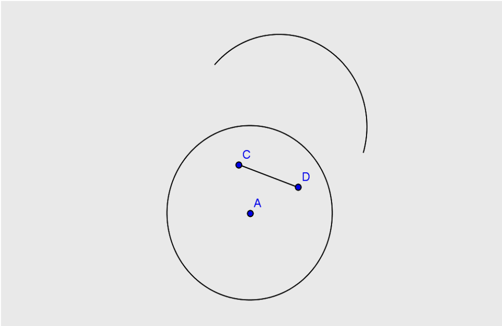
De las relaciones anteriores puede deducirse lo siguiente: la secante y la cosecante de un ángulo son inversamente proporcionales al coseno y al seno del mismo ángulo respectivamente, ya que al incrementarse una la otra disminuirá y viceversa.

Además, el rango de valores tanto de la secante como de la cosecante de un ángulo nunca está en el intervalo (-1,1).

Inversión en el plano

El concepto de inversión se refiere a la reflexión de un objeto respecto a una circunferencia, la cual es conocida como circunferencia de inversión, como por ejemplo la inversión del segmento CD (figura 4) (Reventós, 2003).

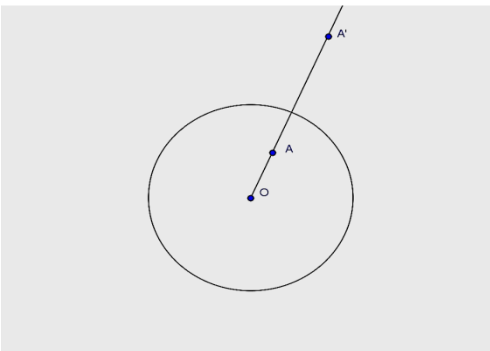
Figura 4. Inversión del segmento CD.



Fuente: Los autores (2018)

Por estar involucrada una circunferencia, puede deducirse que tanto el centro como el radio de la misma son elementos de la inversión. El centro de la circunferencia es conocido como el *centro de reflexión o de inversión* y tiene la propiedad de ser colineal con cualquier punto y su reflejo, también llamado *homólogo*, como por ejemplo la inversión del punto A (figura 5).

Figura 5. Inversión del punto A.



Fuente: Los autores (2018)

Otro elemento de la inversión es la *potencia*, la cual es igual al cuadrado del radio de la circunferencia de inversión. Otra característica de la potencia de inversión es que es igual al producto de la distancia entre el centro de inversión y un punto dado y la distancia entre el mismo centro y el punto reflejado u homólogo, esto es:

Donde: O es el centro de reflexión, A es un punto dado, A' es el reflejo de A y K es la potencia de la inversión.

De la ecuación anterior puede deducirse que la inversión es una relación de proporcionalidad inversa entre dos magnitudes, debido a que K es constante y para que se mantenga así, al aumentar una de las magnitudes necesariamente la otra tiene que disminuir proporcionalmente y viceversa.

Relación entre las razones trigonométricas y la inversión

Como se observó en el apartado anterior, la inversión es una relación de proporcionalidad inversa, por lo tanto, puede aplicarse a cualquier par de variables que compartan una relación de este tipo.

Se mostró que la secante y la cosecante de un ángulo son inversamente proporcionales al coseno y el seno de ese ángulo respectivamente, por lo tanto, su relación puede ser tratada por medio del concepto de inversión.

Las igualdades $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ y $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ también pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\sec\alpha \cdot \cos\alpha = 1 \quad y \quad \csc\alpha \cdot \sin\alpha = 1$$

Puede notarse que las ecuaciones anteriores cumplen con la ecuación general de la inversión y que para cada caso K es igual a uno, por lo cual el radio de la circunferencia de inversión es uno.

GeoGebra

El GeoGebra es un software libre de código abierto que puede ser utilizado desde los primeros años de educación hasta el nivel universitario (Hohenwarter y Jones, 2007). Fue desarrollado como trabajo de tesis de maestría por Markus Hohenwarter en el año 2001, en la Universidad de Salzburgo, Austria. Combina las herramientas de la geometría, el álgebra, el cálculo, la estadística, entre otras áreas.

El GeoGebra se caracteriza por su dinamismo, lo que permite al usuario explorar relaciones entre los objetos, anticipar comportamientos y validar su conocimiento, y modelar situaciones problemáticas de Matemática y Física que impliquen Álgebra, Geometría y Cálculo, por lo cual se considera una herramienta valiosa para el desarrollo de actitudes y competencias en los estudiantes de estas ciencias (García, 2011; Iturbe *et al.*, 2012).

METODOLOGÍA

La metodología utilizada es documental de tipo descriptiva, ya que se revisaron diversas fuentes de información, y se describió un modelo dinámico que utiliza el software GeoGebra para el estudio de las funciones secante y cosecante de un ángulo con la finalidad de dar cumplimiento al objetivo planteado en la investigación (Hernández *et al.,* 2010).

Descripción de un modelo dinámico con el uso del GeoGebra

Para el diseño del modelo dinámico

Se parte de dibujar en el software GeoGebra, la circunferencia trigonométrica y un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene sus vértices ubicados, uno en el centro de la circunferencia y el otro sobre la misma. El tercer vértice del triángulo se ubica sobre el eje horizontal.

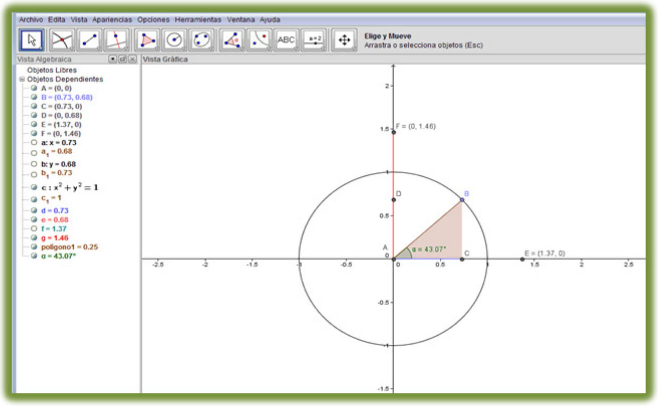
El trabajar de esta manera permite simplificar la comprensión de los objetos estudiados, debido a que los valores del coseno y del seno para el ángulo interior del triángulo en el vértice correspondiente al centro de la circunferencia, son iguales a las longitudes de dos simples segmentos: el primero es el cateto adyacente al ángulo estudiado y el segundo es la proyección sobre el eje Y del cateto opuesto al mismo.

Por lo antes expuesto la simple inversión de los extremos no comunes de dichos segmentos respecto a la circunferencia trigonométrica, producirá dos puntos conocidos como homólogos de los puntos invertidos, los cuales al unirse al centro de la circunferencia generarán otros dos segmentos, uno horizontal y otro vertical, cuyas longitudes serán iguales a los valores de la secante y la cosecante respectivamente para dicho ángulo.

El procedimiento para el diseño del modelo dinámico es el siguiente:

1. Se traza la circunferencia trigonométrica (herramienta: circunferencia dado su centro y su radio, en el software GeoGebra).
2. Se ubica un punto cualquiera B sobre la circunferencia (herramienta: nuevo punto).
3. Se construyen por B perpendiculares a los ejes de coordenadas (herramienta: recta perpendicular).
4. Se determinan las intersecciones de las perpendiculares con los ejes (C sobre el eje X y D sobre el eje Y) (herramienta: intersección de dos objetos).
5. Se ocultan las perpendiculares a los ejes (click derecho sobre la misma opción: muestra objeto).
6. Se construye el triángulo rectángulo ABC (herramienta: polígono).
7. Se define el ángulo α en el vértice A del triángulo (herramienta: ángulo).
8. Se trazan los segmentos AC y AD correspondientes al coseno y al seno del ángulo α respectivamente y se les cambia su color para diferenciarlos (herramienta: segmento entre dos puntos y click derecho sobre los segmentos y la opción: propiedades de objeto).
9. Se invierten los puntos C y D respecto a la circunferencia trigonométrica para obtener sus homólogos, los cuales se renombran como los puntos E y F respectivamente (herramienta: refleja objeto en circunferencia y click derecho sobre los puntos y opción: renombra).
10. Se trazan los segmentos AE y AF correspondientes a la secante y a la cosecante del ángulo α respectivamente y se les cambia su color para diferenciarlos (herramienta: segmento entre dos puntos y click derecho sobre los segmentos y la opción: propiedades de objeto).
11. Se muestran las coordenadas de los puntos E y F, las cuales se corresponderán con los valores de la secante y la cosecante de α respectivamente (click derecho sobre los puntos, la opción: propiedades de objeto, luego opción: básica, muestra rótulo y nombre y valor).

Figura 6.Modelo dinámico final con el uso del GeoGebra



Fuente: Los autores (2018)

Para la aplicación del modelo dinámico

Se sugiere a los estudiantes desplazar el punto B por toda la circunferencia; esto se puede llevar a cabo manualmente o activando la animación automática del modelo, lo cual tiene por finalidad que los aprendices observen como varían las longitudes de los segmentos representativos de la secante y la cosecante y a su vez sus medidas y por lo tanto noten que éstas no tomarán valores del intervalo (-1,1) por lo que los recorridos de sus funciones homónimas son el conjunto. Esto puede observarse más claramente activando el rastro de los puntos E y F.

El desplazamiento del punto B también permitirá mostrar que las funciones estudiadas son periódicas, debido a que las variaciones de las longitudes de los segmentos se repetirán cada vez que dicho punto complete el recorrido sobre la circunferencia y se notará que sus períodos son 2π. Además, este desplazamiento generará que los estudiantes observen que para ciertos valores del ángulo α los segmentos se hacen muy grandes, por lo que dichos valores de α no pertenecen a los dominios de las funciones secante y cosecante.

Para mostrar que la función secante es par y la función cosecante es impar se sugiere mover el punto B hasta alcanzar algunos valores de α y de sus simétricos, -α, para que los alumnos observen que $\sec \alpha = \sec(-\alpha)$ y $-\csc \alpha = \csc(-\alpha)$.

También se puede mostrar con el modelo dinámico la proporcionalidad inversa que existe entre las razones trigonométricas recíprocas, ya que con la variación del ángulo α se notará que al incrementarse la longitud de los segmentos representativos del coseno y el seno del ángulo α, disminuye la longitud de los segmentos que representan a la secante y la cosecante y viceversa.

CONSIDERACIONES FINALES

- Se destaca la importancia de incorporar recursos didácticos novedosos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, permitiendo a los docentes apoyarse en las tecnologías, para facilitar en sus estudiantes el aprendizaje significativo de las funciones trigonométricas.
- La aplicación del modelo dinámico permite establecer relaciones entre conceptos matemáticos que no parecían estar vinculados, es decir, las razones trigonométricas y la inversión en el plano.
- Con este modelo dinámico es posible realizar interpretaciones geométricas de las razones trigonométricas de la secante y la cosecante de un ángulo y por lo tanto de sus funciones homónimas.
- Con el entorno dinámico que proporciona el GeoGebra se facilita la comprensión de las características de la secante y la cosecante de un ángulo y de sus funciones homónimas, además de poderse representar gráficamente para diferentes valores del ángulo α, de manera individual o combinando entre ellas, para ver semejanza y diferencias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Díaz, Stephanie y Prieto, Juan (2013). **El análisis de los signos de las razones trigonométricas con tecnología. Una manera de trascender las reglas prácticas.** Memorias del VIII Simposio Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Naturales de la Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela, pp. 22-32.

Duarte, Ana; Moya, Andrés; Míguez, Ángel; Torres Carlos; Silva, Darwin; Vásquez, Federico; Paredes, Hernán; Blanco, Jorge; Bustamante, Keelin; Gracia, María Gabriela; Reaño, Norberto; Becerra, Rosa; Serrano, Wladimir y Millán, Zuly. (2012). **Naturaleza matemática**. Primera edición, Caracas, Venezuela, Ministerio del Poder Popular para la Educación.

García, María (2011). **Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula**. Tesis doctoral realizada en la Universidad de Almería, España. Recuperado de: https://archive.geogebra.org/en/upload/files/Tesis_MariadelMarGarciaLopez. pdf. (consultado: 2018, febrero 11).

Hernández, Roberto; Fernández, Carlos y Baptista, Pilar (2010). **Metodología de la Investigación**. Quinta edición, Ciudad de México, México, McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A.

Hohenwarter, Markus y Jones, Keith (2007). **Ways of linking Geometry and Algebra: The case of GeoGebra**. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, Vol. 27, No.3, United Kingdom, pp.126-131.

Iturbe, Alicia; Ruiz, María; Pistonesi, María y Fantini, Susana (2012). **Uso de GeoGebra**

en la enseñanza de la Geometría en carreras de diseño. Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra. Uruguay, pp. 516-523. Recuperado de:

http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/procesadas1397168176/38.pdf. (Consultado: 2018, enero 25).

Reventós, Agustí (2003). **Geometría inversiva**. La Gaceta de la RSME, 6(1), pp. 39-79.

Zill, Dennis y Wright, Warren (2011). **Cálculo de una variable, Trascendentes tempranas**. Cuarta edición, Ciudad de México, México, McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A.