

Aplicación de técnicas de espacio de estado en el control robusto de sistemas lineales

Pedro Antonio Teppa Garrán^{1}, Juan Bruce Acosta Anderson²,
José Jesús Ferrer Suárez¹ y Xavier Duarte¹*

¹Departamento de Procesos y Sistemas, Universidad Simón Bolívar, Valle de Sartenejas, Venezuela. ²Escuela de Ingeniería Química, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela

Recibido: 24-01-08 Aceptado 20-02-09

Resumen

En este artículo se considera el control robusto de dos aplicaciones reales empleando técnicas simples de espacio de estado. La primera aplicación consiste en el control de una articulación flexible movida por un motor armónico y la segunda en el control de la temperatura de un tanque enchaquetado. En muchos sistemas mecánicos, especialmente aquellos que emplean cajas de conversión para transmitir el torque, la flexibilidad en la articulación es un factor importante a considerar. Por otra parte, el estudio y control del proceso de intercambio de calor que ocurre en un recipiente enchaquetado es un fenómeno físico de gran interés práctico.

Palabras clave: articulación flexible, oscilaciones mecánicas, tanque enchaquetado, seguimiento robusto, sistema politópico.

Application of state space techniques in the robust control of linear systems

Abstract

This paper considers the robust control of two real applications employing simple state space methods. The former consist in a torque transmission controller for a flexible joint moved by a harmonic motor, and the latter is a temperature controller for a jacketed vessel. In many mechanical systems, especially those which employ gear boxes in torque transmission, joint flexibility is an important factor to consider. On the other hand, heat transfer process in a jacketed vessel is a physical phenomenon with great practical interest for knowledge and control purposes.

Key words: flexible joint, mechanical oscillations, jacketed vessel, robust tracking, polytopic systems.

I. Introducción

La tecnología de los motores armónicos como sistemas generadores de torque posee como ventaja principal la flexibilidad mecánica

del metal para transmitir el movimiento. Los motores armónicos constan generalmente de tres partes: un generador, un eje flexible y un eje rígido. El motor armónico goza de una alta popularidad en sistemas

* Autor para la correspondencia: pteppa@usb.ve

mecatrónicos, particularmente por su alta eficiencia de conversión de torque (puede llegar a radios de 100:1) y a su reducido tamaño. En aplicaciones de automatización donde se requiere de precisión en la colocación de un brazo o extensión mecánica, el control de la posición por medio de sistemas mecánicos con articulaciones flexibles, puede ser difícil si no se logran compensar las oscilaciones provenientes de las deformaciones de los elementos (1). El tanque enchaquetado forma parte del banco experimental de intercambiadores de calor del Laboratorio de Ingeniería Química de la Universidad de Carabobo (2), posee una chaqueta convencional sin deflectores, fabricada con lámina de acero inoxidable de tres milímetros de espesor y soldada a la parte lateral del tanque. Tiene un ancho de diez milímetros y una altura de 140 mm, de manera que su capacidad sea de $546,7 \text{ cm}^3$ de fluido. Existen dos boquillas, cada una con una válvula de bola, que permiten el paso de fluido caliente (medio calefactor) por la chaqueta. Además, posee dos termopares tipo J para medir la temperatura del fluido tanto a la entrada como a la salida de la chaqueta. El tanque donde está soldada la chaqueta posee otro termopar tipo J para medir la temperatura del fluido contenido en él (fluido frío). El tanque donde se encuentra la chaqueta es un tubo catálogo 40 con cuatro pulgadas de diámetro nominal y 195 mm de altura, soportado por tres patas soldadas en la parte inferior. En el fondo del tanque se encuentra una válvula de bola acoplada a una manguera PT-300, que permite drenar el fluido contenido en éste, una vez culminado el proceso. El fluido frío se encuentra en un recipiente cilíndrico de 102,8 mm de diámetro interno y 114,3 mm de diámetro externo, con paredes de acero inoxidable AISI 304. El fluido caliente circula por una chaqueta convencional sin deflectores, con las características reseñadas con anterioridad. La masa del fluido frío permanece constante a lo largo de todo el proceso y no existe agitación en el tanque.

En este artículo, técnicas básicas en espacio de estado (3-6), para el diseño de controladores lineales invariantes en el tiempo (LTI), son extendidas para controlar la posición de la articulación flexible movida por el motor armónico y la temperatura en el tanque enchaquetado, a través de una metodología que garantiza un seguimiento robusto, esto es, seguimiento a pesar de modificaciones en los parámetros del sistema y la presencia de señales de perturbación externas constantes pero con la magnitud desconocida. La organización de este documento es la siguiente: la sección II describe el modelo matemático de una articulación flexible movida por un motor armónico y la sección III a su vez, el del tanque enchaquetado. En la sección IV se considera una teoría de diseño de controladores empleando las técnicas de espacio de estado, haciendo hincapié en una metodología que garantiza un seguimiento robusto. Finalmente, en la sección V, se ilustra el desempeño robusto de los controladores a través de simulaciones, a ese fin, se consideran algunos parámetros inciertos en las dos aplicaciones, lo que permitirá representar los modelos matemáticos a través de polítopos (7-9).

II. Modelo matemático de una articulación flexible

El modelaje de una articulación flexible que actúe bajo la acción de un motor armónico debe considerar las interacciones entre los diferentes elementos que forman parte del motor. En este trabajo nos concentramos en un modelo que permite el estudio de los efectos de la fricción y de la torsión sobre las oscilaciones de la articulación. En la figura 1.a se muestra un diagrama de una articulación flexible donde se consideran los siguientes parámetros: J_m y J_l son las inercias del motor y de la articulación respectivamente, M es la masa de un brazo de longitud l colocado en el extremo de la articulación, el mismo representa el objeto cuya posición se desea controlar, K es un elemento de torsión que refleja las deformaciones que

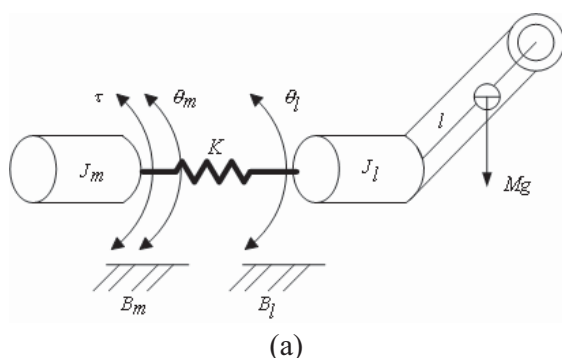


Figura 1. Aplicaciones consideradas. (a) Modelo de una articulación flexible (b) Recipiente enchaquetado del Laboratorio de Ingeniería Química de la Universidad de Carabobo.

sufren los componentes mecánicos de la articulación al transmitir el roce, B_m y B_l constituyen las fricciones entre los elementos del sistema y, finalmente, θ_m y θ_l son las posiciones del motor y de la carga, respectivamente.

Las ecuaciones dinámicas del sistema son

$$\begin{aligned} J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m - K(\theta_l - \theta_m) &= u, \\ J_l \ddot{\theta}_l + B_l \dot{\theta}_l - K(\theta_l - \theta_m) + Mgl \sin(\theta_l) &= 0. \end{aligned} \quad [1]$$

La entrada u es el torque aplicado a la articulación proveniente de un motor acoplado directamente al generador. Seleccionando como vector de estado $x = [\theta_l \ \dot{\theta}_l \ \theta_m \ \dot{\theta}_m]^T$ y linealizando la ecuación [1] en el origen resulta el modelo en variables de estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-Mgl - K}{J_l} & -\frac{B_l}{J_l} & \frac{K}{J_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{J_m} & 0 & -\frac{K}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \quad [2]$$

La salida controlada es $y = x_1 = \theta_l$. Los valores numéricos de los parámetros del sistema son $K = 0,8 \text{ Nm/rad}$, $J_m = 0,0004 \text{ Nm}^2/\text{rad}$, $M = 0,5 \text{ Kg}$, $J_l = 0,0004 \text{ Nm}^2/\text{rad}$, $B_l = 0,004 \text{ Nm/rad}$, $l = 0,2 \text{ m}$ y $B_m = 0,015 \text{ Nm/rad}$.

III. Modelo matemático de un tanque enchaquetado

Para modelar el tanque enchaquetado de la figura 1.b se toma inicialmente como volumen de control, el interior del recipiente y posteriormente se considera como volumen de control, la chaqueta, luego de realizar los balances de energía respectivos, se obtienen las ecuaciones [3] y [4]. La descripción de los parámetros aparece en la tabla 1.

$$m_L C_{PL} \frac{dT_L(t)}{dt} = -UA[T_L(t) - T_M(t)] \quad [3]$$

$$\begin{aligned} \rho_M V_E C_{PM} \frac{dT_M(t)}{dt} &= UA[T_L(t) - T_M(t)] \\ &+ \rho_M \dot{V}_M C_{PM} [T_{M1}(t) - T_{M2}(t)] \end{aligned} \quad [4]$$

La temperatura del fluido de la chaqueta se puede relacionar con la temperatura del líquido en el tanque y la temperatura del

Tabla 1
Descripción de los parámetros del tanque enchaquetado.

ρ_M	densidad del medio calefactor (kg/m ³)
V_E	volumen de la chaqueta (m ³)
C_{PM}	capacidad calorífica del medio calefactor en la chaqueta (kJ/kgK)
\dot{V}_M	caudal del medio calefactor (m ³ /s)
$T_{M1}(t)$	temperatura del fluido que entra a la chaqueta (K)
$T_{M2}(t)$	temperatura del fluido que sale de la chaqueta (K)
m_L	masa de fluido frío en el tanque (kg)
C_{PL}	capacidad calorífica del fluido frío en el tanque (kJ/kgK)
$T_L(t)$	temperatura del fluido frío en el tanque (K)
U	coeficiente global de transferencia de calor entre los fluidos (kW/m ² K)
A	área externa de transferencia de calor (m ²)
$T_M(t)$	temperatura del medio calefactor (K)

medio calefactor que entra a la chaqueta a través de

$$T_{M2}(t) = T_L(t) + [T_{M1}(t) - T_L(t)] \exp\left(-\frac{UA}{\rho_M \dot{V}_M C_{PM}}\right) \quad [5]$$

Al combinar las ecuaciones [4] y [5] resulta el modelo en variables de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_L(t) \\ \dot{T}_M(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} T_L(t) \\ T_M(t) \end{bmatrix} + b T_{M1}(t),$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} T_L(t) \\ T_M(t) \end{bmatrix}, \quad [6]$$

donde las matrices de estado A y de entrada B vienen dadas por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{UA}{m_L C_{PL}} & -\frac{UA}{m_L C_{PL}} \\ \left(\frac{UA}{m_L C_{PL}} - \frac{\dot{V}_M}{V_E} \left(1 - \exp\left(-\frac{UA}{\rho_M \dot{V}_M C_{PM}}\right)\right)\right) & -\frac{UA}{\rho_M V_E C_{PM}} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\dot{V}_M}{V_E} \left(1 - \exp\left(-\frac{UA}{\rho_M \dot{V}_M C_{PM}}\right)\right) \end{bmatrix}.$$

Los valores numéricos de los componentes de las matrices anteriores son

$$\frac{UA}{m_L C_{PL}} = 0,00296 \text{ s}^{-1}, \quad \frac{UA}{\rho_M V_E C_{PM}} = 0,00611 \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{\dot{V}_M}{V_E} \left(1 - \exp\left(-\frac{UA}{\rho_M \dot{V}_M C_{PM}}\right)\right) = -0,00585 \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{UA}{m_L C_{PL}} - \frac{\dot{V}_M}{V_E} \left(1 - \exp\left(-\frac{UA}{\rho_M \dot{V}_M C_{PM}}\right)\right) = -0,00289 \text{ s}^{-1}$$

Finalmente, el modelo en variables de estado del tanque enchaquetado viene dado por [7]. Puede verificarse fácilmente que el modelo es inestable a lazo abierto.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{T}_L(t) \\ \dot{T}_M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00296 & -0,00296 \\ -0,00289 & -0,00611 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L(t) \\ T_M(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,00585 \end{bmatrix} T_{M1}(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} T_L(t) \\ T_M(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

[7]

IV. Diseño del controlador LTI empleando técnicas de espacio de estado

Considere una planta lineal $P = (A, b, c)$, invariante en el tiempo, estrictamente propia y de dimensión n descrita en variables de estado por las ecuaciones

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx. \quad [8]$$

Con $x \in \mathfrak{R}^n$ el vector de estado y $u \in \mathfrak{R}$, $y \in \mathfrak{R}$, la entrada y la salida respectivamente. Suponga que el par (A, b) es controlable, entonces la ley de control por realimentación de estado viene dada por

$$u = r - kx = r - \sum_{i=1}^n k_i x_i \quad [9]$$

con r una señal de referencia externa y $k_i \in \mathfrak{R}$, $\forall i = 1, \dots, n$. La salida a lazo cerrado es

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = ce^{A(t-t_0)} x(t_0) + c \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad [10]$$

donde y_{zi} , y_{zs} representan la respuesta de entrada cero y estado cero respectivamente.

Antes de formular el *problema de regulación* se define la región $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ en la figura 2, en la misma serán ubicados los autovalores del sistema a lazo cerrado. El parámetro α regula la velocidad de la respuesta, β el amortiguamiento y γ las dinámicas más rápidas, esto último es un factor crítico en la especificación de los actuadores del sistema de control.

Problema 1 (Regulación)

Suponga $r = 0$, el sistema responderá a condiciones iniciales diferentes de cero. El problema es determinar el vector k de forma que la respuesta de entrada cero y_{zi} tienda asintóticamente a cero de forma controlada.

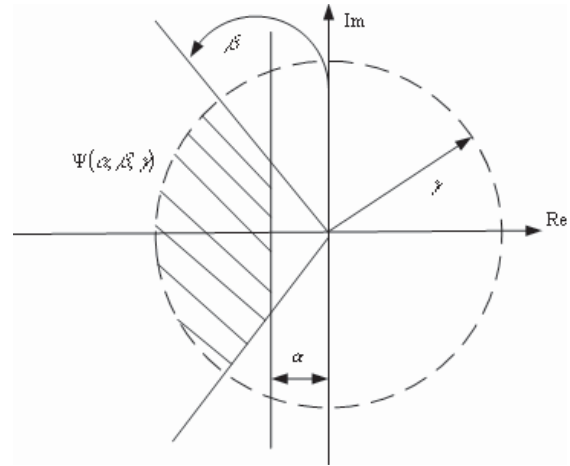


Figura 2. Región de ubicación de los autovalores a lazo cerrado.

Para resolver el problema de regulación considere la planta $P = (A, b, c)$ [8]. Se pueden presentar tres casos: (i) Si $sp(A) \in \Psi(\alpha, \beta, \gamma)$, donde $sp(A)$ denota el espectro de la matriz A , no será necesaria la realimentación de estado pues $y_{zi}(t)$ tiende a cero satisfactoriamente. (ii) Si la matriz A es Hurwitz (i.e. $sp(A) \in \text{Re}\{s\} < 0$ con s la variable de Laplace) pero algunos autovalores están fuera de la región $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$. Entonces, la respuesta de entrada cero será muy oscilatoria o muy lenta. (iii) Si la matriz A es inestable entonces se tendrá $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_{zi}(t)| = \infty$.

Los casos (ii) y (iii) requieren realimentación de estado. Esto es, $u = r - kx = -kx$, el sistema realimentado se convierte en $P_r = (A - bk, b, c)$ y la respuesta causada por la condición inicial $x(t_0)$ es

$$y_{zi}(t) = ce^{(A-bk)(t-t_0)} x(t_0). \quad [11]$$

Si se escoge el vector k de manera que $sp(A - bk) \in \Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ entonces $y_{zi}(t)$ tenderá a cero de forma controlada. Para calcular el vector k se dispone del procedimiento siguiente (4)

Procedimiento 1

1. Seleccione una matriz arbitraria F de dimensión $n \times n$ que contenga el conjunto

deseado de autovalores y que no coincidan con los de la matriz A .

2. Seleccione un vector arbitrario \bar{k} tal que el par (F, \bar{k}) sea observable.
3. Determine la única matriz T definida positiva solución de la ecuación de Lyapunov $AT - TF = b\bar{k}$.
4. Determine k como $k = \bar{k}T^{-1}$ y $(A - bk)$ tendrá el conjunto deseado de autovalores.

El requisito sobre los autovalores de la matriz F en el paso (1) está asociado a condiciones de existencia de la solución de la ecuación de Lyapunov (10) que aparece en el paso (3). Por otra parte, de la ecuación de Lyapunov y la relación $k = \bar{k}T^{-1}$ se desprende el hecho que $(A - bk) = TFT^{-1}$, o sea, las matrices $(A - bk)$ y F son equivalentes y por lo tanto se verifica que $sp(A - bk)sp(F)$. Una ventaja del procedimiento 1 es que puede ser extendido de manera inmediata al caso multivariable (4, 11). Un aspecto del procedimiento 1 que merece un comentario adicional tiene relación con la selección de F y \bar{k} , a ese fin, se escribe el polinomio característico del sistema a lazo cerrado a partir de los autovalores deseados, se supone, por ejemplo, sin pérdida de generalidad que $n = 3$, o sea, $\Delta_d(s) = s^3 + \phi_1s^2 + \phi_2s + \phi_3$. Entonces, el sistema descrito en la forma canónica observable (12, 13)

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Fz \\ y &= \bar{k}z \end{aligned}, \text{ con } F = \begin{bmatrix} -\phi_1 & 1 & 0 \\ -\phi_2 & 0 & 1 \\ -\phi_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{k} = [1 \ 0 \ 0],$$

es tal, que el par (F, \bar{k}) es observable y los autovalores de la matriz F coinciden con los deseados. En lo que sigue, se formula el problema de seguimiento de una señal externa de referencia

Problema 2 (Seguimiento)

Suponga $r(t)$ no nula $\forall t \geq 0$. El problema consiste en determinar el vector k de forma que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r(t)$.

Vamos a resolver el problema de seguimiento para $r(t) = \bar{r}$ constante. En este caso, además de la realimentación de estado se requiere de una ganancia prealimentada p , esto es, un controlador de dos grados de libertad, caracterizado por la ley de control

$$u(t) = pr(t) - kx(t), r(t) = \bar{r}, t \geq 0. \tag{12}$$

Para mostrar cómo se calcula p considere el sistema a lazo abierto $P = (A, b, c)$ [8] caracterizado por la función de transferencia

$$g(s) = c(sI_n - A)^{-1}b = \frac{\beta_1s^{n-1} + \dots + \beta_n}{s^n + \alpha_1s^{n-1} + \dots + \alpha_n} = \frac{y(s)}{u(s)} \tag{13}$$

Por su parte el sistema a lazo cerrado $P_r = (A - bk, b, c)$ es descrito por la función de transferencia

$$g_f(s) = c(sI_n - A + bk)^{-1}b = \frac{p \beta_1s^{n-1} + \dots + \beta_n}{s^n + \phi_1s^{n-1} + \dots + \phi_n} = \frac{y(s)}{r(s)} \tag{14}$$

donde las raíces de la ecuación característica $s^n + \phi_1s^{n-1} + \dots + \phi_n = 0$ se encuentran en el interior de la región $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$. Para $r(t) = \bar{r}$, puede demostrarse sin dificultad que si el sistema a lazo abierto no tiene ceros en $s = 0$ la ganancia p viene dada por la expresión

$$p = \phi_n / \beta_n. \tag{15}$$

En resumen, dado el sistema $P = (A, b, c)$ tal que el par (A, b) es controlable entonces: (i) Puede introducirse realimentación de estado para colocar los autovalores de $(A - bk, b, c)$ en $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$. El sistema alcanza regulación. (ii) Si además $c(sI_n - A)^{-1}b$ no tiene ceros en $s = 0$, después de la realimentación de estado puede introducirse una ganancia prealimentada [15] de manera que el sistema siga asintóticamente cualquier señal de referencia constante.

Ahora bien, el problema del enfoque anterior es que cambios en el modelo de la planta debido por ejemplo: a envejecimiento de los componentes, modificaciones en la carga, alteraciones en el ambiente, etc. Ocasionalmente que la salida no siga asintóticamente ninguna señal de referencia constante. En ese caso se dice que el seguimiento no es robusto. Inmediatamente, se discute una forma de diseño (6) que garantiza seguimiento robusto y rechazo a perturbaciones.

Problema 3 (Seguimiento constante robusto)

Para una planta descrita por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu + bw \\ y &= cx\end{aligned}$$

donde w es una perturbación constante de magnitud desconocida. Diseñe un controlador de la clase lineal e invariante en el tiempo, de forma que la salida $y(t)$ siga cualquier referencia constante, incluso en la presencia de perturbaciones $w(t)$ y de variaciones en los parámetros de la planta.

Para resolver el problema 3 adicionalmente a la realimentación de estado se incorpora un integrador y un lazo de realimentación unitaria. El integrador se inserta como indica el diagrama de la figura 3.a. El integrador constituye un modelo de los polos inestables de la referencia tipo escalón y de la perturbación constante. Esto se conoce como *principio del modelo interno* (14) y proporciona los elementos teóricos para extender el diseño a señales de otra clase.

El sistema aumentado de la figura 3.a es descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A + bk) & bk_a \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} w, \\ y &= \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}\end{aligned}\quad [16]$$

Puede demostrarse (4, 6) que si el par (A, b) es controlable y la función de transferencia de la planta $g(s) = c(sI_n - A)^{-1}b$ no tiene ceros en $s = 0$, entonces todos los autovalores de la matriz de estado del sistema aumentado \tilde{A} dada por

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (A + bk) & bk_a \\ -c & 0 \end{bmatrix}, \quad [17]$$

podrán asignarse arbitrariamente seleccionando el vector de ganancias $[k \ k_a]$. La demostración se apoya en el hecho de que si $g(0) = 0$, la conexión en cascada con el integrador resultará en una cancelación cero-polo, lo que implica que la ecuación de estado que describe la conexión no será controlable. A continuación, se demostrará que la salida controlada $y(t)$, sigue de forma asintótica y robusta cualquier referencia constante $r(t) = \tilde{r}$ y rechazará cualquier perturbación constante $w(t)$ de magnitud desconocida. Intercambiando los sumadores internos en la figura 3.a resulta el diagrama de bloques simplificado de la figura 3.b, donde $\bar{g}(s)$ es la función de transferencia de \bar{v} a y dada por

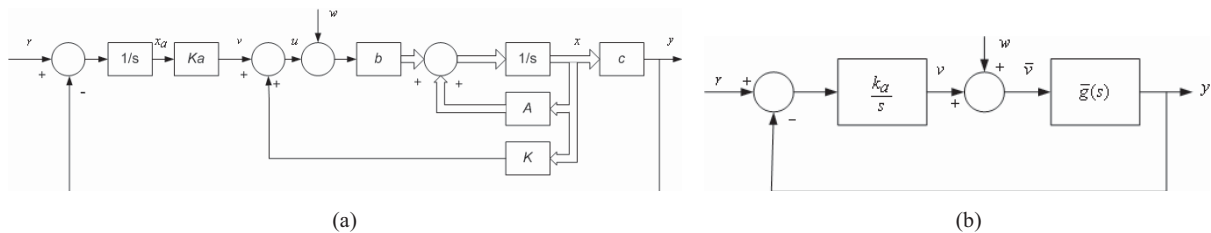


Figura 3. Solución del problema de seguimiento robusto y rechazo a perturbaciones. (a) Diagrama de bloques completo. (b) Diagrama simplificado.

$$\bar{g}(s) = c(sI - A - bk)^{-1}b = \frac{\bar{N}(s)}{\bar{D}(s)},$$

con $\bar{D}(s) = \det(sI - A - bk)$ [18]

El polinomio característico del sistema aumentado [16] es

$$\Delta_{\tilde{A}}(s) = \det \begin{bmatrix} sI - A - bk & -bk\kappa_a \\ c & s \end{bmatrix}. \quad [19]$$

Con el propósito de hallar una relación entre $\Delta_{\tilde{A}}(s)$ y $\bar{g}(s)$ se utiliza la igualdad siguiente

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -c(sI - A - bk)^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A - bk & -bk\kappa_a \\ c & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A - bk & -bk\kappa_a \\ 0 & s + c(sI - A - bk)^{-1}bk\kappa_a \end{bmatrix} \quad [20]$$

Tomando determinantes en la ecuación [20] y empleando las ecuaciones [18, 19] resulta

$$\Delta_{\tilde{A}}(s) = s\bar{D}(s) + k_a\bar{N}(s). \quad [21]$$

Del diagrama de bloques de la figura 3.b se tiene que la función de transferencia de w a y es

$$g_{yw}(s) = s\bar{N}(s) / \Delta_{\tilde{A}}(s). \quad [22]$$

Si $w(t) = \bar{w}$, $\forall t \geq 0$ entonces es inmediata que

$$y_w(s) = (\bar{N}(s)\bar{w}) / \Delta_{\tilde{A}}(s). \quad [23]$$

De donde se desprende el hecho $sp(\tilde{A}) \in \Psi(\alpha, \beta, \gamma) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y_w(t) = 0$. O sea, la única condición para alcanzar el rechazo de la perturbación constante es que los polos de $y_w(s)$ sean estables, note incluso, que lo anterior se logra aún, en presencia de variaciones en los parámetros de la planta, variaciones en la ganancia prealimentada y en la ganancia de realimentación. Esto es, la pertur-

bación se suprime a la salida de forma asintótica y robusta. En forma idéntica, puede demostrarse que la función de transferencia de r a y es

$$g_{yr}(s) = k_a\bar{N}(s) / \Delta_{\tilde{A}}(s). \quad [24]$$

Si $r(t) = \bar{r}$, $\forall t \geq 0$ se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = \frac{k_a\bar{N}(0)\bar{r}}{0\bar{D}(0) + k_a\bar{N}(0)} = \bar{r}, \quad [25]$$

de donde se desprende igualmente que el seguimiento asintótico de cualquier referencia constante es robusto. En las próximas líneas se muestra como transformar el problema 3 de seguimiento robusto en uno de regulación y de esta forma calcular el vector de ganancia $[k \ k_a]$, a ese fin, note que la matriz de estado del sistema aumentado [17] puede reescribirse como

$$\tilde{A} = (A_r + b_r k_r) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} [k \ k_a]. \quad [26]$$

Esto es, en un problema de regulación donde se requiere determinar $k_r = [k \ k_a]$ tal que $sp(A_r + b_r k_r) \in \Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ con las matrices A_r, b_r dadas en [26].

V. Ejemplos numéricos

V.1 Articulación flexible movida por motor armónico

Se considera que el elemento de torsión del modelo [2] es incierto y está definido como $K = K_0 + \delta_K$ con valor nominal $K_0 = 0,8$ y una cota en la incertidumbre representada como $-0,2 \leq \delta_K \leq 0,2$. Por lo que la matriz de estado del sistema pertenece al siguiente dominio convexo politópico (7-9)

$$D_A = \left\{ A \in \mathfrak{R}^{4 \times 4} : A = \sum_{i=1}^2 \lambda_i A_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^2 \lambda_i = 1 \right\} \quad [27]$$

siendo los vértices del politopo las matrices

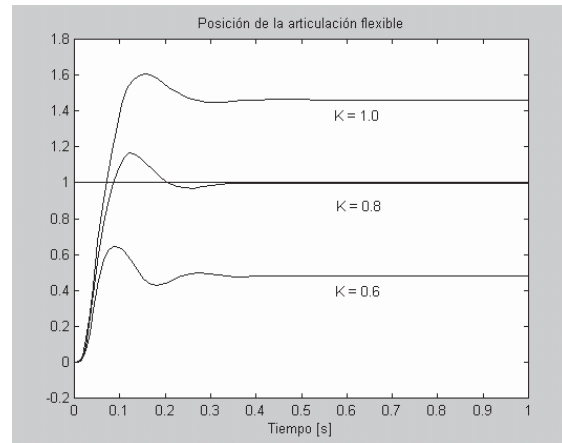
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3950 & -10 & 1500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1500 & 0 & -1500 & -37,5 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4950 & -10 & 2500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2500 & 0 & -2500 & -37,5 \end{bmatrix}. \quad [28]$$

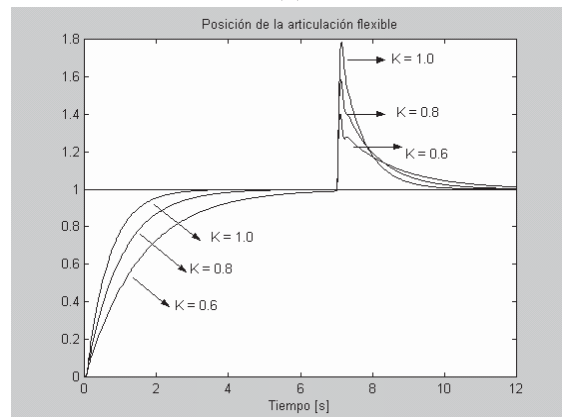
Los polos a lazo cerrado se fijan en $\{-2 + j2, -2 - j2, -10, -10\}$ de forma de tener un amortiguamiento igual a $\zeta = 0,707$ ($\beta = 45^\circ$ en Ψ) y una constante de tiempo de al menos $\tau = 0,5$ segundos ($\alpha = 2$ en Ψ). Aplicando el procedimiento 1 de la sección IV se obtiene la ganancia de realimentación como $k = [4,71 - 0,006 - 2,6 - 0,008]$. La respuesta al escalón, luego de calcular la ganancia prealimentada p , como se estableció igualmente en la sección IV, se muestra en la figura 4.a, tanto para el valor nominal del elemento de torsión $K = 0,8$ como cuando éste alcanza los valores extremos del intervalo de incertidumbre. Evidentemente, el seguimiento deja de ser satisfactorio cuando ocurren cambios en la planta. La figura 4.b permite apreciar simultáneamente el seguimiento robusto de la referencia constante y la supresión robusta de una perturbación constante de magnitud dos que comienza a actuar a partir de $t = 7$ s, todo esto, a pesar de los cambios en el elemento de torsión.

V.2 Tanque encaquetado

Se considera que tanto la masa m_L como la capacidad calorífica C_{PL} del fluido frío en el modelo matemático del tanque encaquetado [6] son inciertos y definidos a través de $m_L = m_{L0} + \delta_m$ y $C_{PL} = C_{PL0} + \delta_C$; con valores nominales $m_{L0} = 1,2904$ Kg y $C_{PL0} = 4,183$ kJ/kgK. Las cotas de incertidumbre vienen dadas por $-0,2 \leq \delta_{m_L} \leq 0,2$ y $-0,5 \leq \delta_{C_{PL}} \leq 0,5$. En la figura 5.a puede apreciarse el dominio de variación paramétrica. Las matrices de estado calculadas en



(a)



(b)

Figura 4. Respuesta al escalón del sistema de articulación flexible a lazo cerrado: (a) Solución del Problema 2 (b) Solución del Problema 3.

los extremos del dominio de variación corresponden a

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,00290 & -0,00290 \\ -0,00289 & -0,00611 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,00229 & -0,00229 \\ -0,00356 & -0,00611 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0,00398 & -0,00398 \\ -0,00187 & -0,00611 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0,00313 & -0,00313 \\ -0,00272 & -0,00611 \end{bmatrix}. \quad [29]$$

El lugar geométrico de la figura 5.b permite apreciar la inestabilidad a lazo abierto del tanque enchaquetado, para variaciones de la masa y la capacidad calorífica del fluido frío dentro de los intervalos de incertidumbre respectivos. La función de transferencia nominal (asociada al centro del rectángulo de la figura 5.a) del tanque enchaquetado es

$$g(s) = c(sI_n - A_0)^{-1}b = \frac{-0,00001732}{s^2 + 0,00315s - 0,00002663}. \quad [30]$$

Los polos a lazo cerrado se fijan en $\{-0,5 + j, -0,5 - j\}$ por lo que el polinomio característico a lazo cerrado resulta en $\Delta_c(s) = s^2 + s + 1,25$. Empleando la ecuación [15] la ganancia prealimentada viene dada por $p = 1,25 / -0,00001732 = -72188$. El procedimiento 1 arroja la ganancia de realimentación $k = [-72360 \quad 170]$. Combinando estos resultados, y suponiendo que el líquido en el interior del tanque se encuentra a temperatura ambiente (27°C); podemos apreciar en la figura 6.a el seguimiento insatisfactorio de una señal de referencia constante de 20° incorporando una perturbación a partir de $t = 7$ segundos de magnitud 10°C por el canal de entrada. En este último experimento, sólo se ha considerado el modelo nominal. Finalmente, en la figura 6.b, se considera el diseño robusto, para esto, se fijan los polos a lazo cerrado en $\{-0,5 + j, -0,5 - j, -2\}$ resultando en el vector de ganancias

$$k_r = [k \quad k_a] = [188200 \quad -510 \quad -144380].$$

En este caso, se puede apreciar la ventaja del seguimiento robusto ante variaciones paramétricas y la perturbación constante de 10°C en el canal de entrada aplicada a partir de $t = 7$ segundos.

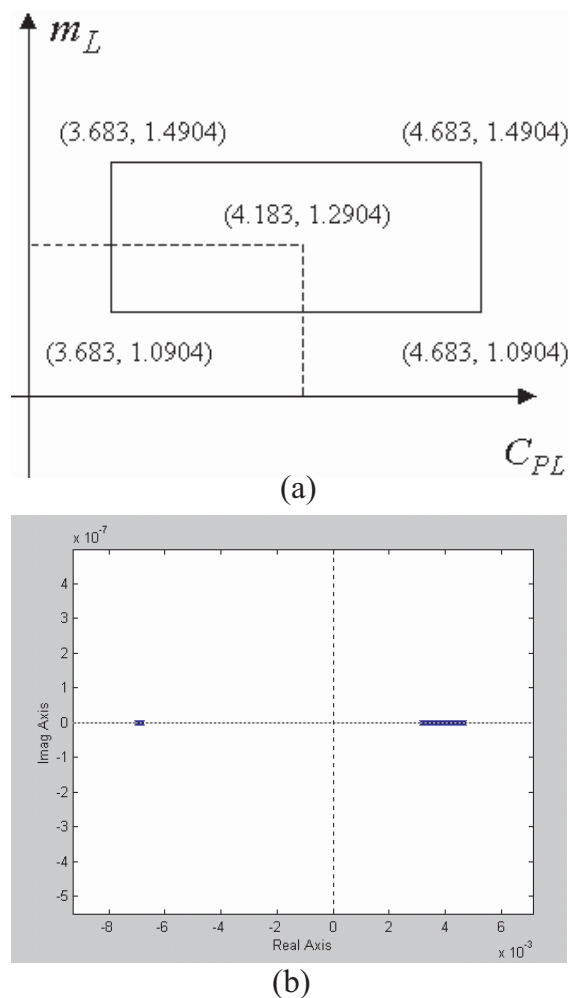
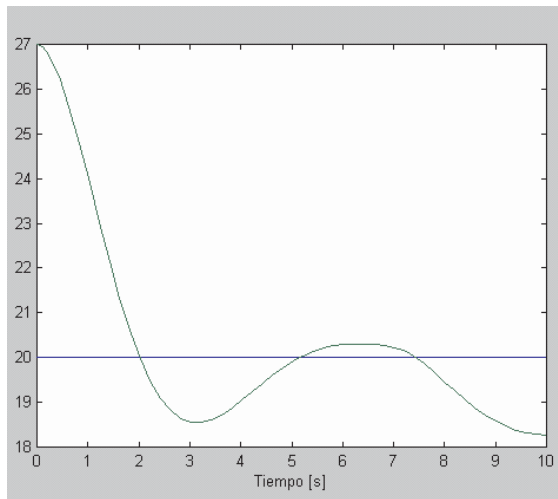


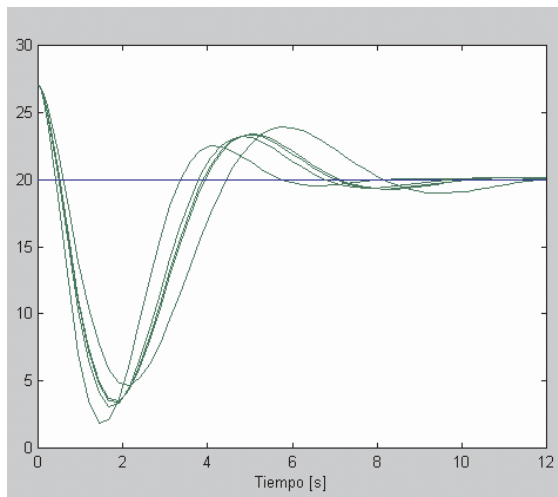
Figura 5. Análisis del Tanque Enchaquetado (a) Dominio de variación de los parámetros inciertos. (b) Lugar geométrico de las raíces para variaciones de m_L y C_{PL} en sus intervalos de incertidumbre.

Conclusiones

Una metodología simple basada en técnicas de espacio de estado fue desarrollada y aplicada al control de la posición de una articulación flexible, así como al control de la temperatura del fluido frío de un tanque enchaquetado. Se logró que la posi-



(a)



(b)

Figura 6. Respuesta a lazo cerrado del Tanque Enchaquetado para una referencia de magnitud igual a 20 grados centígrados y aplicación en el canal de entrada de una perturbación constante de magnitud igual a 10 grados centígrados a partir de $t = 7$ s. (a) Seguimiento convencional considerando solamente el modelo nominal (b) Seguimiento robusto considerando todos los vértices del politopo.

ción de la articulación siguiera de forma asintótica y robusta una referencia constante y adicionalmente, fue obtenida la supresión robusta de una señal de perturbación constante de magnitud desconocida que actúa en el canal de entrada. Igualmente, se alcanzó la cancelación de las numerosas oscilaciones provenientes de las deformaciones mecánicas que ocasionan que el ángulo de la extensión articulada varíe en forma significativa durante la respuesta transitoria. El tanque enchaquetado se estabilizó con éxito, se logró el seguimiento asintótico ante cambios bruscos en la temperatura de referencia y se suprimió el efecto de una perturbación constante introducida en el canal de entrada. Todo esto, a pesar de los cambios exhibidos por algunos parámetros del modelo.

El procedimiento desarrollado puede extenderse sin dificultades al caso multivariable ya que descansa en la solución de una ecuación algebraica de Lyapunov. Esta metodología ha sido empleada con mucho éxito por el autor principal del artículo, dentro de sus cursos básicos de control a nivel de pregrado, como una forma de introducir conceptos avanzados de la teoría de control, a través de la utilización de herramientas simples y conocidas por los estudiantes.

Referencias bibliográficas

1. TONGUE B. *Principles of Vibration*. Oxford University Press. New York (USA). 1996.
2. ACOSTA J.B. Evaluación experimental de procesos transitorios de transferencia de calor en fase líquida. Reporte técnico, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo. Valencia (Venezuela). 2005.
3. CALLIER F. y DESOER C. *Linear System Theory*, Springer-Verlag. New York (USA). 1991.
4. CHEN Ch. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press. New York (USA). 1999.

5. DOMÍNGUEZ S., CAMPOY P., SEBASTIÁN J.M., JIMÉNEZ A. **Control en el Espacio de Estado** Prentice-Hall Internacional. New Jersey (USA). 2002.
6. HOWZE J., BHATTACHARYYA S. **IEEE Trans Autom Control** 42: 980-983. 1997.
7. BIANNIC J. Commande robuste de systèmes a paramètres variables: Applications en Aéronautique (Para obtener el título de Doctor en Sistemas de Control). ENSAE. Toulouse (Francia). 1996.
8. BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E., BALAKRISHNAN V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**, Society for Industrial and Applied Mathematics: SIAM. Philadelphia (USA). 1994.
9. TEPPA P. **Rev Fac Ing UCV** 23: 5-17. 2008.
10. BROGAN W. **Modern Control Theory**. Prentice-Hall (USA). 1991.
11. ALBERTOS P., SALA A. **Multivariable Control Systems**. Springer-Verlag (USA). 2004.
12. KUO B. **Automatic Control Systems**. Prentice-Hall (USA). 1996.
13. OGATA K. **Modern Control Engineering**. Prentice-Hall, New Jersey (USA). 1997.
14. MORARI M., ZAFIRIOU E. **Robust Process Control**. Prentice-Hall Internacional, New Jersey (USA). 1989.