CIENCIA 3(3), 229-230, 1995
Maracaibo, Venezuela

Una desigualdad para la clase traza

Wilson R. Pacheco R.

Departamento de Matemáticas y Computación, Facultad Experimental de Ciencias La Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela. email wpacheco@luz.ve

Recibido: 03-04-95 Aceptado: 28-09-95

Resumen

En la presente nota se demuestra una desigualdad análoga a la existente entre la media geométrica y la aritmética de números positivos, para la traza de operadores no negativos pertenecientes a la clase traza.

Palabras claves: Clase traza; media aritmética; media geométrica.

An inequality for trace class

Abstract

In the present note we prove an inequality analog of the geometric mean-arithmetic mean for positive numbers, for the trace of non negative operators in the trace class.

Key words: Arithmetic mean; geometric mean; trace class.

Introducción

Sea ***H*** un espacio de Hilbert separable, ***L(H)*** denotará el álgebra de operadores sobre ***H***, denotaremos por ***T(H)*** al álgebra de los operadores de la clase traza:

$$T(H) = \{ \mathrm{T} \in L(H) \ / \ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle \sqrt{\mathrm{T}^{*}\mathrm{T}}e_n, e_n \rangle \right| < \infty \} \quad [1]$$

donde $\{ e_n \}$ es cualquier base ortonormal de ***H***, y se define la traza de **T** por:

$$tr(\mathbf{T}) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{T}e_n, e_n \rangle \quad [2]$$

K(H) será el álgebra de los operadores compactos y ***C₂(H)*** los operadores de Hilbert-Schmidt. Es bien conocido que $T(H) \subset C_2(H) \subset K(H)$ (1)

Un operador **T** en ***L(H)*** se dice no negativo si $\langle \mathbf{Tx}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ para todo **x** en ***H***.

El propósito de la presente nota es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1

Sea H un espacio de Hilbert separable, **T** *y* **S** *en* ***T(H)*** *operadores no negativos, entonces:*

$$tr(\mathbf{TS}) \geq 0 \quad [3]$$

$$(tr(\mathrm{TS}))^{1/2} \leq \frac{tr(\mathrm{T}) + tr(\mathrm{S})}{2} \quad [4]$$

Este teorema es una generalización de la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética de dos números no negativos.

En (2) Yisong Yang, respondiendo a una pregunta de R. Bellman (3), prueba que el teorema 1 es válido si **T** y **S** son matrices de tamaño nxn, es decir el caso dimensión finita del teorema 1. Para nuestra demostración haremos uso del siguiente teorema:

Teorema 2 (Teorema espectral para operadores compactos normales)

Sean H un espacio de Hilbert separable y **T** *en L(H) compacto y normal, entonces existe una base ortonormal* $\{e_n\}$ *de H tal que*

$\mathbf{T}e_n = \mathbf{a}_n e_n$, *para todo n natural donde los* $\mathbf{a}_n$ *son números complejos que convergen a 0 (1).*

Resultados

Demostración del teorema 1

Como **S** está en ***T(H)***, **S** es compacto y por ser no negativo **S** es normal luego por el teorema 2 existe una base ortonormal $\{e_n\}$ de ***H*** tal que $\mathbf{S}e_n = \mathbf{a}_n e_n$, donde cada $\mathbf{a}_n$ es no negativo.

Así, se tiene

$$tr(\mathbf{TS}) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle \mathbf{TS}\, e_n, e_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{a}_n\langle \mathbf{T}e_n, e_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{a}_n\mathbf{b}_n \qquad [5]$$

donde $\mathbf{b}_n = \langle \mathbf{T}e_n, e_n\rangle \geq 0$, pues **T** es no negativo, luego $tr(\mathbf{TS}) \geq 0$, por ser la suma de elementos no negativos y [3] es cierto. Además:

$$(tr(\mathbf{TS}))^{1/2} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{a}_n\mathbf{b}_n\Big)^{1/2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}(\mathbf{a}_n\mathbf{b}_n)^{1/2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{a}_n+\mathbf{b}_n}{2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{a}_n + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{b}_n}{2} = \frac{tr(\mathrm{S})+tr(\mathrm{T})}{2} \qquad [6]$$

con lo que queda establecida [4] y concluida la demostración del teorema.∎

Nosotros usaremos ahora la desigualdad [4] para demostrar una desigualdad entre las normas de operadores que pertenecen a la clase traza y los de Hilbert-Schmidt. En ***T(H)*** se define la norma por:

$$\|\mathbf{T}\|_1 = tr\sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}} \qquad [7]$$

y en $C_2(H)$ se define la norma por:

$$\|\mathbf{T}\|_2 = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\|\mathbf{T}e_n\|^2\Big)^{1/2} \qquad [8]$$

donde $\{e_n\}$ es cualquier base ortonormal de ***H***.

Así, se tiene que si **T** está en ***T(H)*** entonces:

$$\|\mathbf{T}\|_2 = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\|\mathbf{T}e_n\|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\langle \mathbf{T}^*\mathbf{T}e_n, e_n\rangle\Big)^{1/2} = (tr(\mathbf{T}^*\mathbf{T}))^{1/2} = (tr(\sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}\,\sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}))^{1/2} \leq \frac{tr(\sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}})+tr(\sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}})}{2} = tr(\sqrt{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}) = \|\mathbf{T}\|_1 \qquad [9]$$

La desigualdad entre la media geométrica y la aritmética de dos números no negativos es un caso particular de la más general para n números no negativos , sería interesante conocer si una desigualdad más general a la aquí probada permanece válida para la traza de n operadores no negativos en la clase traza y si ella, además, implica las desigualdades existentes entre las normas de operadores de las clases $C_n(H)$ con n natural.

Referencias Bibliográficas

1. DUNFORD N., SCHWARTZ J.: ***Linear Operators Part II***, Interscience Publishers. New York (USA), 1963, pp. 887-1145.
2. YANG, Y.: A Matrix trace inequality. ***Journal Math Anal Appl*** 133: 573 -574, 1988.
3. BELLMAN R.: Some inequalities for positive definite matrices, in ***General Inequalities 2. Proccedings, 2nd Internat Conf on General Inequalities.*** E.F. Beckenbach (eds). Birkäuser. Basel (Switzerland), 1980, pp 89-90.